

Stringtheorie und Kosmologie

Aaron Gootjes-Dreesbach*

Die Stringtheorie ist seit ihrer ursprünglichen Entwicklung zur Beschreibung der starken Wechselwirkung zu einem führenden Kandidaten zur Vereinigung von allgemeiner Relativitätstheorie und Quantenmechanik geworden und bietet als solcher weitreichende Implikationen und Denkanstöße für die Kosmologie. In dieser Ausarbeitung eines Vortrages^a im Rahmen des Seminars *Teilchenphysik & Kosmologie* im ws 15/16 an der Technischen Universität Dortmund wird sie zuerst anhand ihrer Geschichte vorgestellt. Im Anschluss wird ein Überblick über verschiedene mögliche Implikationen für die Kosmologie gegeben.

INHALTSVERZEICHNIS

I. Stringtheorie	1
1. Was sind Strings?	1
2. Eine kurze Geschichte der Stringtheorie	1
3. Die Nambu-Goto- und die Polyakov-Wirkung	3
4. Quantisierung und Störungstheorie	4
II. Kosmologie	5
1. Quantengravitation	5
2. Extra Dimensionen	5
Kaluza-Klein Kompaktifizierung	6
Branenkosmologie	6
3. Stringinflation	6
4. Das Pre-Big Bang Modell	7
5. Das ekpyrotische Universum	7
6. Die AdS/CFT-Korrespondenz	8
III. Fazit	9
Literatur	9

I. STRINGTHEORIE

1. Was sind Strings?

Die fundamentalen Objekte der Stringtheorie sind eine naheliegende Verallgemeinerung von Teilchen. Dazu betrachten wir sie zuerst auf rein klassischem Niveau: Während Teilchen relativistisch durch eine Parametrisierung $x_\mu(\tau)$ ihrer Weltlinie beschrieben werden können, besitzen Strings hingegen als ausgedehnte Objekte eine *Weltfläche* $x_\mu(\tau, \sigma)$, deren zusätzlicher raumartiger Parameter σ zu einer festen Zeit τ seine eindimensionale Ausdehnung durchläuft. Die Verallgemeinerung auf Objekte, die p Raumdimensionen einnehmen, ist durch

sogenannte p -Branes gegeben, deren *Weltvolumen* durch $x_\mu(\tau, \sigma_1, \dots, \sigma_p)$ parametrisiert ist - all diese Möglichkeiten sind in Abb. 1 skizziert.

Strings kommen grundsätzlich in zwei Arten: *Geschlossen*, also mit einer zu einem Schlauch aufgerollten Weltfläche, oder *offen*, also mit einer berandeten Weltfläche. Der essentielle Unterschied zwischen diesen besteht natürlich durch die für den raumartigen Parameter σ festgelegten Randbedingungen. Sind diese periodisch, ist der String geschlossen. Für offene Strings kann zwischen Dirichlet und Neumann Randbedingungen gemischt werden- entlang jeder Dimension, für die Dirichlet-Randbedingungen gewählt werden, wird das Ende des Strings fixiert. Das lässt sich auch so interpretieren, dass die Bewegung der Enden auf sogenannte *Dp-Branes*, als eigene dynamische Objekte, eingeschränkt werden (siehe auch Abb. 1(d)).

Während verschiedene Stringtheorien ohne offene Strings auskommen, umfasst *jede* von ihnen geschlossene Strings, da diese aus Wechselwirkungen offener Strings hervorgehen können. Interessant für die Quantisierung, welche wir im Abschnitt I.4 kurz ansprechen, ist auch, dass man auf geschlossenen Strings klar zwischen links- und rechtslaufenden Schwingungsmoden unterscheiden kann, bei offenen gehen diese jedoch durch Reflektion am Ende ineinander über.

2. Eine kurze Geschichte der Stringtheorie

Eine wichtige Voraussetzung für die Stringtheorie wurde bereits in den 20ern bei einem früheren Versuch der großen Vereinheitlichung der Kräfte geschaffen. *Theodor Kaluza* wollte aus einer 4+1-dimensionalen ART den Elektromagnetismus als „Nebenprodukt“ der neuen Raumdimension herleiten [1]. Überraschenderweise ergaben sich in der Tat aus den Einsteinschen Feldgleichungen zusätzlich fast genau die Maxwellgleichungen; natürlich mit dem Problem, dass vier Raumdimensionen kaum unserer Alltagserfahrung entsprechen. Der schwedischen Physiker Oskar Klein schaffte es dieses Problem zu lösen: Er spekulierte, dass uns eine periodische Di-

* aaron.gootjes-dreesbach@tu-dortmund.de

^a Folien erhältlich unter <http://hamiltonian.net/strings/>

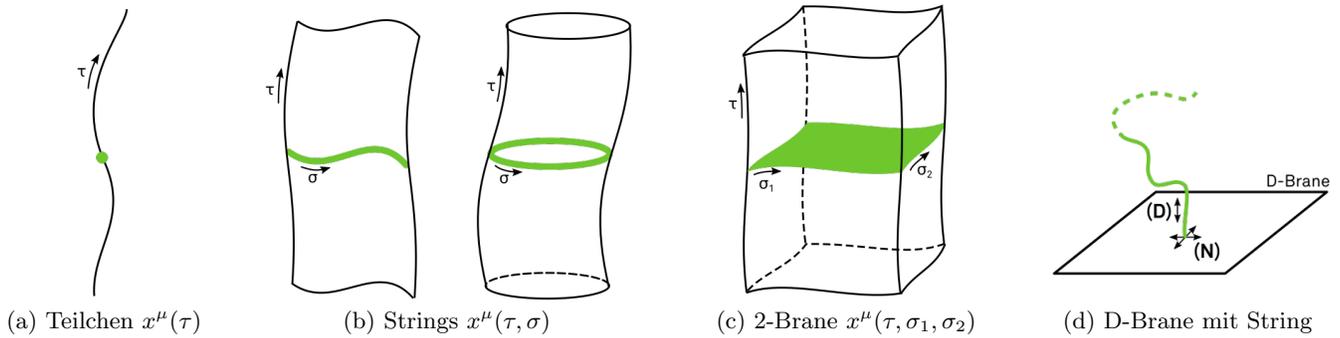


Abbildung 1. Visualisierungen fundamentaler Objekte der Raumzeit. In (a) bis (c) verläuft vertikal die Zeitachse.

mension mit sehr kleiner Ausdehnung bei unseren großen Längenskalen entgangen ist, ganz so, wie die zweidimensionale Oberfläche eines Seils für die meisten Zwecke durch eine Linie völlig ausreichend angenähert ist [2].

Während die vereinheitlichte Theorie von Kaluza bei genauerer Betrachtung nicht mit dem Experiment vereinbar ist, bleibt die Idee von Kompaktifizierung weiterer Dimensionen hochaktuell: So wird am LHC zum Beispiel nach Kaluza-Klein-Partnerteilchen gesucht. Dabei handelt es sich um Teilchen, die durch ihre kinetischen Energie entlang der kleinen Dimension eine große scheinbare Masse dazugewinnen, aber ansonsten mit bekannten Teilchen übereinstimmen.

Das sogenannte *dual resonance model* [3] war das erste Modell das (fundamentale) Strings beschrieb, wenn das auch zu diesem Zeitpunkt niemandem klar war. Es wurde von Gabriele Veneziano 1968 als Streuamplitude im Rahmen der *S-Matrix-Theorie* aufgestellt, einer besonders in den 40ern bis 60ern beliebte Alternative zur QFT, die sich auf observablennahe Größen konzentriert anstatt Annahmen über fundamentale Objekte der Raumzeit zu treffen. Die Amplitude wurde so konstruiert, um den folgenden, 1959 von Tullio Regge in experimentellen Daten erfassten, Zusammenhang zu erfüllen (genannt *Regge-Trajektorien*):

$$J \stackrel{!}{=} \alpha(s) := \alpha' s + \alpha_0, \quad (1)$$

wobei J der Drehimpuls eines gemessenen Hadrons ist, die α 's Konstanten sind und \sqrt{s} die Schwerpunktsenergie, bei der das Hadron entsteht.

Bereits 1969 erkannten dann Yoichiro Nambu, Holger Bech Nielsen und Leonard Susskind unabhängig voneinander, dass diese postulierte Amplitude auch aus der Annahme abgeleitet werden kann, dass die beobachteten Teilchen nur verschiedene Schwingungsmoden eines einzigen, zugrundeliegenden Strings sind, und eröffneten dadurch offiziell das Feld der Stringtheorie. Das Interesse an der Theorie ebte jedoch schnell ab, als sich der Erfolg der QCD zur Erklärung der Resonanzen, für die Strings erfunden wurden, abzeichnete. Doch 1974 erkannte man, dass bestimmte Moden, die bis dahin eher ungewollt waren, sich genau so verhalten, wie

man es sich von Gravitonen wünscht. Somit kam völlig unerwartet die Vereinheitlichung von der Gravitation und Quantenmechanik als Motivation für Strings hinzu. Die Theorie wie sie zu diesem Zeitpunkt vorlag wird heute als bosonische Stringtheorie bezeichnet, da sie Fermionen noch nicht beschreiben konnte. Darüberhinaus weist sie Probleme mit der Stabilität der Raumzeit auf und ist nur in 26 Raumzeitdimensionen konsistent umsetzbar, erfordert also eine Kompaktifizierung nach Klein.

Fermionische Freiheitsgrade konnten unter Zuhilfenahme von Supersymmetrie ab 1980 in sogenannten *Superstring-Theorien* erfasst werden. Etwa 1984/85 kam es dann zur *ersten Superstring-Revolution*, eine Zeit in der verschiedene Erkenntnisse eine große Vereinheitlichung realistischer machten und es rapide zu enormer Beliebtheit der Theorie kam. Schließlich bildeten sich fünf verschiedene konsistente Superstring-Theorien heraus, alle nur zehndimensional:

- Typ I
- Typ IIA
- Typ IIB
- $SO(32)$ heterotisch
- $E_8 \times E_8$ heterotisch

Die Theorien unterscheiden sich dabei zB in den Symmetrien, die sie erfüllen, oder ob sie auch offene Strings zulassen. *Heterotische* Theorien sind solche, in denen die linkslaufenden und rechtslaufenden Schwingungsmoden auf den (geschlossenen!) Strings unterschiedlich behandelt werden: Die einen Moden durch eine 10-dimensionale Superstringtheorie im engeren Sinne, die anderen durch eine von 26 auf zehn Dimensionen kompaktifizierte bosonische Stringtheorie.

Zur *zweiten Superstring-Revolution* kam es etwa 1994, als sich die Existenz von *Dualitäten* zwischen diesen fünf Theorien abzeichnete. Schließlich stellte Edward Witten die Vermutung auf, dass sie alle nur Grenzfälle einer einzigen umfassenden Theorie darstellen, welche er *M-Theorie* taufte. Eine Dualität bezeichnet dabei eine Vorschrift,

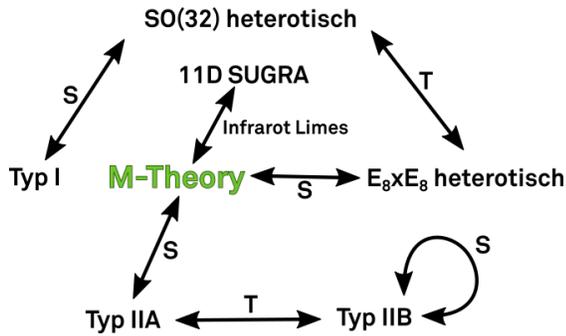


Abbildung 2. Die Dualitäten zwischen Superstrings

zwei Theorien durch Übersetzung ihrer Observablen und ihres Zustandes miteinander zu identifizieren- sie zeigt also auf, dass die zugrundeliegende Physik äquivalent ist. Nach weiterer Arbeit wurden in der Tat zwischen allen Superstring-Theorien entweder eine S -Dualität (zwischen Theorien mit schwacher bzw. starker Kopplung) oder T -Dualität (zwischen Theorien mit Kompaktifizierung zu einem großen bzw. kleinem Volumen) gefunden. Darüberhinaus besitzt die M-Theorie als Niederenergielimes die elf dimensionale Supergravitation. Diese Zusammenhänge sind in Abbildung 2 dargestellt.

Eine andere Dualität im Kontext der Stringtheorie mit weitreichenden Konsequenzen entdeckte Juan Maldacena im Jahr 1997, die sogenannte *AdS/CFT-Korrespondenz*. Sie verknüpft eine Stringtheorie im AdS-Raum mit einer Feldtheorie auf dessen Rand, näheres dazu in Abschnitt II.5.

In den frühen 2000ern wurden es immer klarer, dass die Stringtheorie (insbesondere durch die Reduktion der Dimensionalität) eine enorm große Anzahl an Vakua mit auf niedrigen Energieskalen teils völlig verschiedener Physik besitzt. Der Raum der so möglichen Realisierungen wird oftmals als *String Landscape* oder *moduli space of vacua* bezeichnet. Damit kam eine oftmals als „String Wars“ bezeichnete Auseinandersetzung auf, ob die Theorie dennoch im Sinne Poppers falsifizierbar ist. Kritiker wie Peter Woit oder Lee Smolin machen ihr daher gar den Status einer physikalischen Theorie strittig, während Stringtheoretiker wie Leonard Susskind oder Brian Greene oftmals entgegenhalten, dass die sehr erfolgreiche QFT ohne Wahl von Teilcheninhalt und Wechselwirkungen ebenfalls kaum klare Vorhersagen trifft. Ausserdem sei die Theorie mathematisch noch nicht ausreichend verstanden. Steven Weinberg sieht die Vielfalt der String Landscape im Sinne des anthropischen Prinzips als möglicherweise unumgänglichen Vorteil: Scheinbares fine-tuning von Naturkonstanten kann schon dadurch erklärt werden dass keine uns ähnliche Beobachter in anderen Vakua existieren. Klar ist dennoch dass ein völlig zweifellos „stringhaftes“ Verhalten erst bei womöglich niemals praktikabel hohen Energien auftritt und sich eine Orientierung am Experiment mindestens schwierig darstellt.

Heutzutage zeichnet sich jedoch noch eine ganz an-

der Motivation der Stringtheorie ab: Sie kann, ganz unabhängig von der Ambition sie zu einer vereinheitlichten fundamentalen Theorie zu erheben, dazu dienen als mathematisches Werkzeug andere Theorien zu verstehen oder Denkanstöße möglicher Mechanismen in einer Quantengravitation liefern. Beispiele davon werden sich im Kontext der AdS/CFT-Korrespondenz zeigen.

3. Die Nambu-Goto- und die Polyakov-Wirkung

Um nun die bosonische Stringtheorie etwas exakter zu erfassen wollen wir, vorerst auf klassischem Niveau, eine sinnvolle relativistische Wirkung für Strings konstruieren. Diese wird durch die Analogie zum relativistischen Teilchen motiviert, weshalb wir zuerst diese Wirkung kurz wiederholen. Für ein Teilchen mit der Masse m ist die Wirkung in der allgemeinen Relativitätstheorie gegeben durch das Integral über seine Weltlinie, also

$$S = -m \int_{\Gamma} ds = -m \int_{\Gamma} \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau}} d\tau, \quad (2)$$

wobei Γ die als $x_{\mu}(\tau)$ parametrisierte Weltlinie mit dem Linienelement $ds = \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}}$ bezeichnet. Führen wir zusätzlich eine durch $g_{\mu\nu}$ auf der Weltlinie induzierte Metrik $h = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \tau} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau}$ ein, gilt also

$$S = -m \int_{\Gamma} \sqrt{-h} d\tau. \quad (3)$$

Die 1970 formulierte *Nambu-Goto Wirkung* [4, 5] ist nun die naheliegende Modifikation für ein zweidimensionales Objekt: Wir betrachten jetzt das Integral über die *Weltfläche* Σ , wobei die Proportionalitätskonstante T jetzt als Spannung interpretiert werden kann:

$$S = -T \int_{\Sigma} dA. \quad (4)$$

Auch hier kann zur Berechnung mit einer auf der Weltfläche induzierten Metrik $h_{ab} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma^a} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \sigma^b}$ gearbeitet werden (wobei wir kurz $\sigma^a := (\tau, \sigma)^a$ mit $a \in \{0, 1\}$ schreiben):

$$S = -T \int_{\Sigma} \sqrt{-\det h} d\tau d\sigma \quad (5)$$

Man beachte dass nur x^{μ} ein dynamisches Objekt ist und h_{ab} allein eine rein praktische Abkürzung.

Die Nambu-Goto Wirkung besitzt zwei wichtige Symmetrien: Zum einen die Invarianz unter Poincaré-Transformationen der Weltfläche $x_{\mu}(\tau, \sigma)$. Zum anderen eine lokale Eichsymmetrie: Die Zuordnung von τ und σ zu einem bestimmten Raumzeitpunkt ist unphysikalisch, sodass eine Reparametrisierung als lokale Transformation (also ein Diffeomorphismus) die Wirkung invariant lässt.

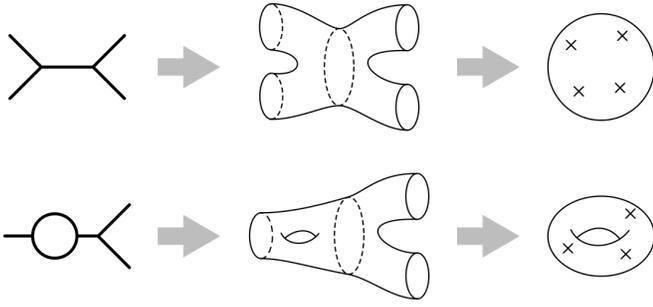


Abbildung 3. Neuerungen bei der Störungstheorie anhand zweier Beispieldiagramme: In der linken Spalte sind Feynman-Diagramme aus der QFT gegeben, in der mittleren ihr direktes Analogon mit (geschlossenen) Strings. Rechts sind die durch Symmetrien daraus erzeugten punktierten Sphären und Tori gezeigt.

Bemerkenswerterweise ist bisher der einzige wirkliche Parameter, den unsere Theorie enthält, die Stringspannung T . Eine weitere Parameter, die Stringkopplung g_s , wird typischerweise eingeführt um Störungstheorie nutzen zu können, er lässt sich jedoch auch als dynamisch erzeugte Größe auffassen. Beobachtete Interaktionen von effektiven Theorien bei den uns zugängliche Energieskalen kommen oftmals erst dadurch zustande, dass die Dimensionalität der Raumzeit geeignet reduziert wird, mehr dazu in II.2.

Aufgrund der Quadratwurzel in der Nambu-Goto Wirkung stellt diese sich als nur schwer im Pfadintegralformalismus quantisierbar heraus. Um dieses Problem zu umgehen nutzte Polyakov 1981 eine fünf Jahre früher eingeführte Wirkung mit einem weiteren dynamischen Objekt [6], einer freien Metrik k_{ab} der Weltfläche. Die *Polyakov Wirkung* ist dennoch klassisch betrachtet völlig äquivalent zur Nambu-Goto Wirkung, denn nach Einsetzen der durch Variation erhaltenen Bewegungsgleichung von k_{ab} reduziert sie sich wieder auf diese. Sie nimmt die Form

$$S = -\frac{T}{2} \int_{\Sigma} \sqrt{-\det k} k^{ab} h_{ab} d\tau d\sigma \quad (6)$$

Mit dem redundanten Freiheitsgrad kommt als Ausgleich eine neue Eichsymmetrie: *Weyl-Invarianz*. Eine Weyl-Transformation besteht dabei dadrin, die Weltfläche $x^\mu(\tau, \sigma)$ unverändert zu lassen aber die freie Metrik $k_{ab}(\tau, \sigma) \mapsto f^2(\tau, \sigma) k_{ab}(\tau, \sigma)$ lokal zu reskalieren. Per Konstruktion werden also durch diese Transformation Winkel bezüglich k_{ab} unverändert gelassen, jedoch lokal die Skala geändert. Es wird sich im nächsten Abschnitt herausstellen, dass diese Symmetrie äußerst praktisch in der störungstheoretischen Behandlung der quantisierten Theorie ist.

4. Quantisierung und Störungstheorie

Die Quantisierung der Polyakov Wirkung führt uns nun unmittelbar zur bosonischen Stringtheorie, wobei man wie bei anderen Theorien mit Eichsymmetrien besondere Vorsicht walten lassen muss physikalisch äquivalente Zustände nicht mehrfach zu zählen. Für die kanonische Quantisierung gibt es dabei essentiell zwei verschiedene Ansätze: Die *kovariante Quantisierung* identifiziert äquivalente Zustände nach der Quantisierung, analog zur Gupta-Bleuler Methode bei der QED. Die *Lightcone Quantisierung*, benannt nach den verwendeten Koordinaten, fixiert die Eichung von Anfang an. Im Rahmen des Pfadintegralformalismus wird analog zur Fadeev-Popov Methode vorgegangen, einschließlich Geisterfeldern auf der Weltfläche. In diesem Abschnitt wollen wir einige wenige Gemeinsamkeiten und Unterschiede zur Pfadintegralquantisierung einer normalen QFT aufzeigen.¹

Ausgangspunkt ist wie in der Feldtheorie die Zustandssumme:

$$Z = \int \mathcal{D}k \mathcal{D}x e^{-S[k,x]} \quad (7)$$

Durch Hinzufügung von Quelltermen lässt sich auch hier eine diagrammatische Störungstheorie aufbauen - die beitragenden Diagramme bestehen dabei aus einer spezifischen, Anfangs- und Endzustände verbindenden Weltfläche $x^\mu(\tau, \sigma)$ sowie einer auf dieser gegebenen Metrik k_{ab} . An dieser Stelle können wir die Eichung fixieren, d.h. die Invarianz unter Weyl-Transformationen und Reparametrisierungen ausnutzen um die Form der Weltfläche auf eine mathematisch einfach zu handhabende zurückzuführen - vorausgesetzt die neue Weltfläche ist homöomorph, also topologisch äquivalent, zu der alten. Das bedeutet insbesondere dass wir bei der Auswertung der Zustandssumme über *nicht äquivalente* Topologien summieren müssen. Durch Einführung der im letzten Abschnitt erwähnten Stringkopplung werden Topologien mit mehr „Löchern“ unterdrückt, sodass wir nach wenigen Formen für ein ausreichend exaktes Ergebnis im Sinne der Störungstheorie abrechnen können. Die niedrigste Ordnung entspricht dabei einer Sphärenförmigen Weltfläche, die nächsthöhere einem Torus.

Wir haben bisher noch nicht diskutiert was dabei mit den Rändern der Weltfläche geschieht, an denen Anfangs- und Endzustand ansetzen. So wie in der herkömmlichen QFT schaut man sich zur Berechnung von S-Matrixelementen speziell asymptotische Endzustände an. Dies kann man sich im Diagramm so vorstellen, dass

¹ Für eine umfassende Einführung in die Stringtheorie siehe zB Lecture Notes wie [7–9] und insbesondere die von David Tong[10].

die Ränder eng zusammengezogen und in die Unendlichkeit geschickt werden um schließlich mit einem Vertex Operator ersetzt zu werden. Man spricht dann von einer *punktierten* Weltfläche.

II. KOSMOLOGIE

Die Untersuchung der Schnittmenge von Stringtheorie und Kosmologie kann beiden Feldern gleichsam dienlich sein: Nimmt man Strings als Theorie der Quantengravitation (und damit der Raumzeit selbst) ernst, so bildet sie die Kulisse für jegliche Kosmologie. Selbst wenn das nicht der Fall ist, ist sie der wohl am weitesten entwickelte Ansatz, sodass man hoffen kann generelle Eigenschaften solcher Theorien zu erfassen und Denkanstöße zur Modellbildung zu gewinnen.

Umgekehrt können sich kosmologische Observablen möglicherweise als bester Zugang zu der vielleicht enormen nötigen Energie zur Beobachtung von Stringeffekten herausstellen. *Spezifische* Modelle der Stringtheorie können dabei heute bereits durch kosmologische Erwägungen ausgeschlossen werden.

Für allgemeine Einführungen in die Stringkosmologie siehe etwa [11–13].

Der zweite Teil dieser Ausarbeitung beginnt mit einer minimalen Zusammenfassung der Probleme einer direkten Quantisierung von Einstein's allgemeiner Relativitätstheorie zur Motivation der Notwendigkeit eines weiterführenden Modells. Daraufhin werden als essentielle Zutat einer Stringkosmologie mögliche Methoden der Dimensionsreduktion vorgestellt und erläutert, wie diese zur Reproduktion des Standardmodells genutzt werden können. Als Implementierung spezifischer kosmologischer Modelle wollen wir sowohl durch Strings generierte Inflation ansprechen als auch exemplarisch zwei alternative Ansätze, die Pre-Big Bang Modelle und das ekpyrotische Universum, skizzieren.

1. Quantengravitation

Der herkömmliche Ansatz für eine Quantengravitation wäre eine Quantisierung der Einstein-Hilbert Wirkung:

$$S[g] \propto \int \sqrt{-\det g} \mathcal{R}[g] d^4x, \quad (8)$$

wobei die Metrik $g_{\mu\nu}$ der dynamische Freiheitsgrad ist, also zu einem Quantenfeld erhoben wird, und \mathcal{R} der Ricci-Skalar ist. Die Anregungen dieses Tensorfeldes sind dann die Gravitonen als Spin 2 Teilchen.

Das Problem mit dieser Theorie ist bekanntermaßen, dass sie nicht renormierbar ist: Die auftretenden Divergenzen lassen sich nicht mehr mit endlich vielen Countertermen kürzen sodass sie ab einer bestimmten Schleifenordnung alle Vorhersagekraft verliert. In der

Theorie mit allein der Metrik treten die ersten Divergenzen aufgrund ihrer Symmetrien erst ab 2 Schleifen auf, mit einer Kopplung an Materie jedoch schon bei einer Schleife. Wie andere nicht-renormierbare Theorien ist die Quantengravitation weitab von der Planck-Skala als effektive Theorie aufgefasst durchaus äußerst nützlich und vorhersagekräftig. Bei einigen der interessantesten Situationen, den scheinbaren Krümmungssingularitäten, wird jedoch genau das UV-Verhalten erforscht, also in Schwarzen Löchern und in einer extrem frühen Phase des Universums. Der interessante Umstand, dass solche Singularitäten in gewissem Sinne vor uns versteckt zu sein scheinen, ist die sogenannte *Cosmic Censorship Hypothesis*.

Die Vereinigung von SUSY und Einstein-Hilbert Gravitation ist die 1973 entdeckte *Supergravitation*, oft kurz *SUGRA*. Im Gegensatz zu den meisten supersymmetrischen Theorien ist die SUSY hier nicht nur global, sondern auch lokal. Ob diese Modifikation ausreicht um alle Divergenzen zu bändigen ist aufgrund der Komplexität der notwendigen Rechnungen jedoch nach wie vor nicht für den allgemeinen Fall geklärt.

Bei der Stringtheorie ergibt sich automatisch eine Gravitation als effektive, niedrigdimensionale Theorie bei niedrigen Energien. Aufgrund der ausgedehnten Natur von Strings läuft man hier nicht in Probleme mit Divergenzen. Die Theorie liefert jedoch auch nicht exakt die Einstein-Hilbert Gravitation: Stattdessen ist die effektive Theorie eine Skalar-Tensor Theorie mit einem zusätzlichen, an den Ricci-Skalar gekoppeltem Skalarfeld Φ , dem sogenannten *Dilaton*. Die effektive Wirkung ist gegeben durch:

$$S \propto \int \sqrt{-\det g} e^{-2\Phi} (\mathcal{R}[g] + 4\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + \dots) d^{26}x \quad (9)$$

Eine Festlegung des Vakuumerwartungswertes des Dilaton führt damit insbesondere zur Reskalierung der Proportionalitätskonstante, fixiert also die Newtonkonstante in der Theorie aller 26 Dimensionen!

Es gibt natürlich eine Vielzahl alternativer Ansätze, wenn die meisten auch nicht so weit entwickelt sind wie die Stringtheorie. Dazu zählt etwa die in den 80er Jahren entwickelte *Schleifenquantengravitation*, die die Raumzeit als ein Spin-Netzwerk beschreibt, oder *Asymptotic Safety*, die das Versagen nicht bei der Theorie selbst, sondern in ihrer störungstheoretischen Behandlung sieht.

2. Extra Dimensionen

Wie bereits in Abschnitt I.2 angesprochen, ist die effektive Physik bei niedrigen Energien essentiell vom gewählten Vakuum abhängig - also insbesondere davon, wie die zusätzlichen Dimensionen reduziert werden. Eine wichtige Herausforderung an die Stringtheorie ist damit, eine Konstruktion zu finden die die Physik des Standardmodells reproduziert. Im folgenden werden zwei

beliebte Ansätze dafür diskutiert, welche oftmals auch kombiniert werden.

Kaluza-Klein Kompaktifizierung

Der erste Ansatz ist die Wiederverwertung der Kaluza-Klein Kompaktifizierung für die Stringtheorie. Anstatt eine einzelne zusätzliche Dimension in der Form eines Kreises aufzurollen, kann man das Konzept auf sehr viel komplexere Formen verallgemeinern: Beliebte sind dabei die sogenannten *Calabi-Yau* Mannigfaltigkeiten, da diese einen flachen effektiven niedrigdimensionalen Raum erlaubt und in gewissem Sinne SUSY auf diesem erhält. Die bekannten Eichgruppen könnten durch geschicktes Aufrollen der zusätzlichen Dimensionen reproduziert werden.

Im Prozess der Kompaktifizierung treten jedoch typischerweise auch eine Vielzahl zusätzlicher masseloser Skalarfelder, die sogenannten *Moduli* auf. Da für diese starke experimentelle Limits existieren, bedarf es eines Mechanismus der ihnen durch ein Potential Massen erzeugt, der typischerweise im Kontext von Superstrings implementierten *Moduli Stabilization*. Ein bestimmtes Vakuum der Theorie kann nun spezifiziert werden durch Angabe der Vakuumerwartungswerte dieser Moduli, was die oben eingeführte Bezeichnung des *Moduli Space* erklärt.

Wir wollen nun an einem minimalen Beispiel die Kompaktifizierung motivieren und aufzeigen, in welchem Sinne eine Kompaktifizierung durch die Vakuumerwartungswerte der Moduli charakterisiert wird. Im Speziellen wollen wir den \mathbb{R}^{25+1} herunterbrechen auf einen Zylinder mit Radius R , also einer Raumzeit $\mathbb{R}^{24+1} \times S^1_R$. Das bedeutet, dass wir von der 25ten Raumdimension Periodizität fordern:

$$x^{25} = x^{25} + 2\pi R \quad (10)$$

Die volle Metrik in 25+1 Dimensionen lässt sich folgendermaßen zerlegen zu einer Metrik $g_{\mu\nu}(x)$ auf den 24 großen Raumdimensionen, einem Vektorfeld $A_\mu(x)$ und einem Skalar $\sigma(x)$:

$$ds^2 =: g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{2\sigma} (dx^{25} + A_\mu dx^\mu)^2, \quad (11)$$

wobei die Indizes nur über die Dimensionen 0...24 laufen, und die Felder im Sinne einer kleinen Dimension R in führender Ordnung nicht mehr von x^{25} abhängen. Erstaunlicherweise äussert sich die Reparametrisierungsfreiheit der 25ten Dimension nun genau in einer lokalen Eichsymmetrie des Feldes $A_\mu(x)$! Mit dem Ricci-Skalar \mathcal{R} des Zielraumes können wir in der effektiven Gravitationswirkung (9) die Feldredefinition (11) durchführen und erhalten

$$S \propto 2\pi R \int \sqrt{-\det g} e^\sigma \left(\mathcal{R} - \frac{1}{4} e^{2\sigma} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma \right) d^{26}x,$$

wobei $F_{\mu\nu}$ der Feldstärketensor von A_μ ist. Dass der kinetische Term von A_μ nicht kanonisch normiert ist, lässt sich durch eine weitere Redefinition beheben (auf diese Art und Weise wurde hier auch das Dilaton „versteckt“). Insgesamt ergibt sich also insbesondere ein neues Eichfeld A_μ und der zusätzliche masselose Skalar σ , genannt *Radion*. Die Bezeichnung rührt daher, dass eine Änderung des Vakuumerwartungswert σ_0 jetzt zu einem neuen effektiven Zylinderradius $R' := R e^{2\sigma_0}$ führt - die Wahl des Vakuumzustand erfährt in der Kompaktifizierung eine geometrische Interpretation.

Mitunter wird das Radion einer Kaluza-Klein Theorie ebenfalls als Dilaton bezeichnet - diese Verwendung wird dadurch motiviert, dass das fundamental auftretende Dilaton der 10-dimensionalen Superstringtheorien auch aufgefasst werden kann als ein Radion der Kompaktifizierung der 11-dimensionalen M-Theorie.

Branenkosmologie

In einer *Branenkosmologie* sind die Standardmodell-Teilchen realisiert als Moden von offenen Strings, fixiert auf (mindestens) einer Dp -Brane die unseren normalen Raum darstellt (für $p > 3$ kann die Brane wiederum kompaktifiziert werden oder ein 3-Dimensionales Schnittvolumen verschiedener Branen betrachtet werden). In dem umgebenden hochdimensionalen Raum, genannt *Bulk* oder *Hyperraum*, können nur geschlossene Strings auftreten. Die Gravitonen werden durch Moden dieser geschlossenen Strings beschrieben - da diese also in den Bulk „entkommen“ können, während die Eichbosonen an die Branen gebunden sind, liefern diese Modelle also eine natürliche Lösung für das Hierarchieproblem. Darüberhinaus lassen sich auch die Eichtheorien hier selbst geometrisch interpretieren: Ein Satz von N_C gestaffelten Branen könnte zB den möglichen Ladungen einer Yang-Mills Theorie entsprechen, während ein weiterer, die ersten Branen schneidender Satz von N_F Branen den Materie-Generationen entspricht. Offene Strings, die zwischen dem ersten und zweiten Satz gespannt sind, würden den Quarks entsprechen, während offene Strings innerhalb des ersten Satzes Gluonen darstellen. Ein explizites Modell ist etwa in [14] zu finden.

Das erste Modell einer Branenkosmologie, erdacht 1999 von Lisa Randall und Raman Sundrum [15], wurde wohl durch die aufkommende Popularität von Branen in der Stringtheorie beeinflusst, kommt jedoch ganz ohne Strings in einer 5-dimensionalen Raumzeit aus.

3. Stringinflation

Inflation kann sehr erfolgreich verschiedene Phänomene erklären, ist jedoch erstmal ein ad-hoc Postulat eines spezifischen Mechanismus. Das Forschungsprogramm der Stringinflation besteht dadrin, möglichst realistische Szenarien zu finden, in denen die Stringtheorie ein

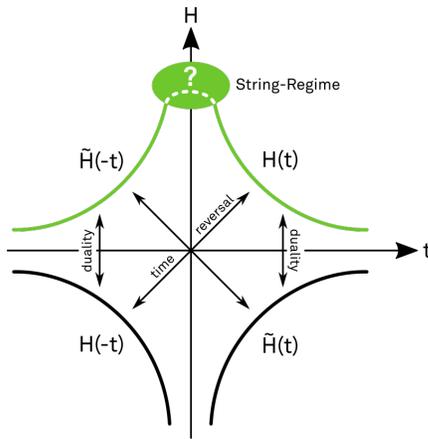


Abbildung 4. Durch T -Dualität und T -Symmetrie implizierte Lösungen im Rahmen des Pre-Big Bang Modells. Diagramm adaptiert von [16].

oder mehrere effektive Inflatonen bereitstellt, also ein spezifisches Inflationsmodell vorhersagt. Dabei wird typischerweise auch versucht, gleichzeitig einen Mechanismus zur Wiedererwärmung nach der Inflationsphase zu motivieren.

Während es wegen der schwierigen experimentellen Lage eine enorme Vielfalt solcher Modelle gibt, lassen sie sich grundsätzlich durch den Ursprung des Inflatons klassifizieren:

Die *Braneninflation* geschieht im Kontext einer Branenkosmologie: Hierbei werden oftmals Branen betrachtet, die sich relativ zueinander im Raum bewegen. Die Rolle des Inflatons ϕ wird häufig von dem *Abstand* zweier Branen übernommen und das Potential $V(\phi)$ durch Interaktionen zwischen ihnen erzeugt. Ein explizites Modell wäre dabei etwa die $D3\text{-}\overline{D3}$ -Brane Inflation, bei der Inflation während der Annäherung zweier Branen abläuft und ihre Kollision schließlich zur Wiedererwärmung führt. Gegen Ende der Inflation kommt es ausserdem zu vermehrter Produktion von auf kosmische Skalen gestreckten Strings, welche über ihre gravitative Wechselwirkung oder über das CMB Spektrum detektiert werden könnten. Interessant ist dabei, dass diese Strings sich von „herkömmlichen“ kosmischen Strings, also topologischen Defekten eines vergangenen Phasenübergangs, durch ein Spektrum von Stringspannungen ausreichend in ihrer Dynamik unterscheiden um eine Detektion als Signatur der Stringtheorie ansehen zu können.

Bei der *Moduli-Inflation* hingegen wird, wie der Name schon andeutet, das effektive Inflaton als eines der im letzten Abschnitt diskutierten Moduli-Felder eingeführt. Hierbei wird die Erzeugung eines Potentials nicht nur dazu benötigt, dem Feld Masse zu geben um mit Limits vereinbar zu sein, sondern dieses muss natürlich auch eine

angemessene Form für die Umsetzung der Inflation haben.

4. Das Pre-Big Bang Modell

Als String-Alternative zur Inflation wollen wir nun noch exemplarisch die Pre-Big Bang Modelle aufführen. Diese 1991 von G. Veneziano eingeführte Klasse von Modellen gehört zu den allerersten im Feld der Stringkosmologie [16, 17]. Die Korrelationen im CMB werden hier zu einer Zeit $t < 0$ gebildet, wobei man in diesen Modellen auch eine zusätzliche herkömmliche Inflation unterbringen kann.

Die Kombination von T -Symmetrie und T -Dualität (zwischen Kompaktifizierung auf großem bzw. kleinem Volumen) als Symmetrien auf dem moduli space impliziert auf dem Lösungsraum eine Dualität zwischen Lösungen des globalen Verhalten der Raumzeit. Die Existenz der (nah genug) bei $t > 0$ von uns beobachteten gebremst expandierenden Lösung mit abflachender Raumkrümmung impliziert dadurch die Möglichkeit einer dualen Lösung, die sich herausstellt als beschleunigte Expansion des Universums mit steigender Krümmung. Die Entwicklung der dazugehörigen Hubble-Parameter $H(t)$ ist in Abbildung 4 skizziert. Diese Lösung kann nun für eine Zeit $t < 0$ angesetzt werden, der asymptotische Anfangszustand des Universum ist dabei flach, kalt und leer. Die Singularität bei $t = 0$ wird nun durch String-Effekte regularisiert und durch einen „Big bounce“ ersetzt. Es wird argumentiert, dass in manchen Observablen des Modells die Beiträge von Physik auf grossen und kleinen Skalen ausreichend entkoppeln, um auch ohne exaktes Verständnis dieses String-Regimes klare Vorhersagen treffen zu können.

Obwohl die Vorhersagen für das CMB Spektrum in Spannung mit aktuellen Messungen steht, stellen diese Modelle einen interessanten und durch heutige Observablen zugänglichen Ansatz für String-motivierte Kosmologie dar.

5. Das ekpyrotische Universum

Eine weitere String-motivierte Kosmologie ist das 2002 publizierte sogenannte *ekpyrotische*² *Universum* von Turok und Steinhardt [18]. Auf den ersten Blick ähnelt es den Szenarien der Braneninflation: Ein (nach Kompaktifizierung) fünf-dimensionaler Bulk wird berandet von zwei 3-Branes. Alle Teilchen des Standardmodells sind wieder als offene Strings an die Branen gebunden, von denen eine unser Universum darstellt, während Gravitonen sich frei

² von griechisch *ekpyrosis*, „Weltenbrand“, nach einer antiken zyklischen Kosmologie der Stoiker.

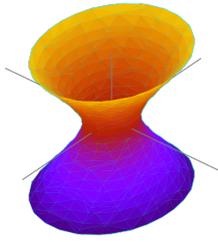


Abbildung 5. Zweidimensionale AdS-Raumzeit eingebettet in den \mathbb{R}^{1+2} [19]. Die Zeitachsen des umliegenden Raumes verlaufen dabei horizontal, die Raumachse vertikal.

zwischen ihnen bewegen können. Die Branen fallen nun in einer langsamen Kontraktion aufeinander zu, ihre Interaktion bei der Kollision erzeugt aus unserer Perspektive auf der Brane wieder den heißen Big Bang. Der entscheidende Unterschied ist dass keine Inflation stattfindet: Es kommt also nicht zu der charakteristischen rapiden Expansion, obwohl die Branen dennoch dynamisch „geglättet“ werden. Das kommt insbesondere Kritikern von Argumenten einer anthropischen Landscape entgegen, da sich hier keine „Tochteruniversen“ mit unterschiedlicher effektiver Physik bilden. Fluktuationen im CMB ergeben sich dadurch, dass die Kollision aufgrund von Quantenfluktuationen nicht überall gleichzeitig stattfindet. Generell ähneln die Vorhersagen stark denen des inflatorischen Standardszenarios der Kosmologie, sie können jedoch von diesem durch das Fehlen von B-Moden im CMB unterschieden werden. Die dunkle Energie lässt sich als die anziehende Kraft zwischen den beiden Branen auffassen. Diese führt nach der Kollision dazu, dass sie wieder abbremst und auf ein neues aufeinander zufallen, es handelt sich also um eine zyklische Kosmologie.

Es wird ausserdem die Möglichkeit diskutiert, die effektive vier-dimensionale Theorie anders zu motivieren als aus einer Einbettung in die Branenwelt.

6. Die AdS/CFT-Korrespondenz

In Abschnitt I.2 wurde bereits eine zentrale Entdeckung moderner Stringtheorie angesprochen: Juan Maldacena’s *AdS/CFT-Korrespondenz* [20]. Wir wollen nun erst die beiden namensgebenden Theorien in diesem Kontext näher erläutern, um schließlich auf die Chancen und neuen Perspektiven, die ihre Äquivalenz mit sich bringt, zurückzukommen.

AdS_n steht für eine Stringtheorie auf einer n -dimensionalen *Anti-de-Sitter* Raumzeit. Diese Raumzeit ist die maximal symmetrische Lösung der Einstein’schen Feldgleichungen, jedoch mit einer negativen, also attraktiven kosmologischen Konstante Λ . Diese Raumzeit lässt sich zur Anschauung folgendermaßen als eine Quadrik in

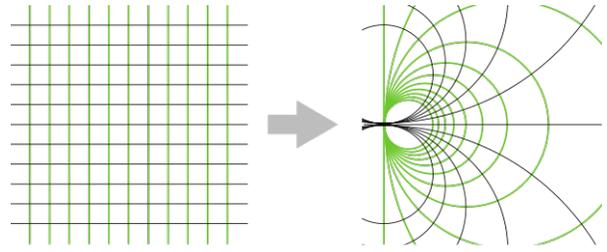


Abbildung 6. Effekt einer speziellen konformen Abbildung auf ein Koordinatensystem [21].

einen Minkowskiraum der Signatur $(n-1,2)$ einbetten:

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - t_1^2 - t_2^2 = -\alpha^2 \quad (12)$$

Die Form, die sich für den 2-dimensionalen AdS-Raum im \mathbb{R}^{1+2} ergibt, ist in Abb. 5 dargestellt. Man beachte dabei, dass sich durch die zwei Zeitdimensionen im äußeren Raum leicht geschlossene zeitartige Kurven umsetzen lassen, wie zB durch einen Kreis mit Radius α auf der horizontalen Ebene - diese lassen sich vermeiden wenn man den AdS nicht nur als eingebettete Untermannigfaltigkeit motiviert³. Es stellt sich heraus dass der Abschluss dieser Raumzeit bei geeigneter Parametrisierung (also im konformen Sinne) einen $(n-1)$ -dimensionalen Rand mit Minkowskimetrik bei der raumartigen Unendlichkeit besitzt.

CFT steht für eine $(n-1)$ -dimensionale QFT mit konformer Symmetrie auf diesem Rand des AdS. Allgemein sind solche *Conformal Field Theories* invariant unter der *konformen Gruppe*. Diese ist die Menge aller winkeltreuen Selbstabbildungen einer Mannigfaltigkeit und bildet im allgemeinen eine Lie-Gruppe. Für den herkömmlichen Minkowskiraum \mathbb{R}^{3+1} enthält sie natürlich die gesamte Poincaré-Gruppe, erweitert sie aber um zwei neue Arten von Transformationen: Sogenannte *Dilatationen*, also isotrope Streckungen der Raumzeit, und *spezielle konforme Abbildungen*, deren Effekt in Abb. 6 veranschaulicht wird. Dadurch gibt es nun insgesamt 15 unabhängige Generatoren der Gruppe.

Die AdS/CFT-Korrespondenz besagt nun die physikalische Äquivalenz solcher Theorien im Sinne einer Dualität: Durch geeignete Übersetzung des Zustandes einer Theorie in die andere lässt sich ihre Dynamik ineinander überführen. Eine explizite Umsetzung dieser generellen Korrespondenz, mit der Maldacena sie auch eingeführt hatte, ist die Äquivalenz der $\mathcal{N} = 4$ supersymmetrischen Yang-Mills Theorie (SYM) zu Typ IIB Superstrings auf einem Produktraum des AdS_5 .

³ Stattdessen betrachtet man ihren sogenannten *covering space*.

Diese kann praktisch zum Beispiel dazu verwendet werden, unter gewissen theoretischen Annahmen von einer stark gekoppelten $\mathcal{N} = 4$ SYM zu der QCD zu extrapolieren, um mittels perturbativer(!) Stringtheorie Berechnungen im nichtperturbativen Regime der QCD durchführen zu können - dieser Ansatz erfreute sich besonderer Beliebtheit als er zur erfolgreichen Vorhersage der am LHC und RHIC gemessenen Viskosität und mittlerweile weiterer Observablen des Quark-Gluon Plasmas eingesetzt wurde [22, 23]. Ähnliche Beispiele, Stringtheorie als Berechnungswerkzeug zu nutzen, finden sich sogar in der Festkörperphysik. Generell wird die Anwendbarkeit der Methode mitunter kontrovers diskutiert, da die anzunähernden Theorien in der Regel weder supersymmetrisch noch konform sind.

Darüberhinaus ist die AdS/CFT-Korrespondenz die wohl konkreteste Realisierung des *Holographischen Prinzips*, also des Umstandes dass die Dynamik einer bestimmten physikalische Theorie gleichwertig sowohl im Innern eines Raumzeitvolumen wie auf ihrem Rand beschrieben werden kann. Postuliert wurde dieses Prinzip von Gerard t’Hooft. Hinweise darauf, dass speziell eine Quantengravitation diese Eigenschaft haben könnte, ergaben sich erstmals aus Jacob Bekensteins und Stephen Hawkings Untersuchung der Entropie eines Schwarzen Loches, die sich als nicht etwa proportional zu dessen Volumen sondern zur Oberfläche des Ereignishorizonts herausstellte. Diese Betrachtungen führten darüberhinaus insbesondere zur Idee

der Hawking-Strahlung, nach dem auch Schwarze Löcher evaporieren können. Das wirft jedoch die Frage auf, wohin die für deterministische, reversible Physik sonst konservierte Information der vom Schwarzen Loch absorbierten Teilchen verschwindet, also das *Informationsparadoxon schwarzer Löcher*. Es werden verschiedene Lösungen dieses Problems diskutiert, im Rahmen des holographischen Prinzips könnte jedoch die absorbierte Information im Inneren komplementär auf dem Horizont des Schwarzen Loches enkodiert sein, und mit der Hawking-Strahlung dort entkommen. Dieser Ansatz bringt jedoch wieder eigene Probleme mit sich, die sogenannten *Firewalls*.

III. FAZIT

Trotz bereits erheblicher Fortschritte seit ihrer Entdeckung in den 70ern, und dem Umstand dass sie der wohl am weit entwickeltste Kandidat einer realistischen Quantengravitation ist, ist die Stringtheorie nach wie vor noch kaum verstanden und hoch umstritten. Grade im Kontext der Kosmologie ist sie jedoch auf gleich mehrere Arten und Weisen nützlich: Als *proof of concept* einer Quantengravitation, zur Inspiration für kosmologisches model building und zur Entwicklung mathematischer Werkzeuge. Insbesondere interessant ist jedoch, dass spezifische Modelle der Stringtheorie über die Kosmologie oftmals in Kontakt mit dem Experiment treten können.

-
- [1] T. Kaluza, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin.(Math. Phys.) **1921**, 45 (1921).
 - [2] O. Klein, Zeitschrift für Physik **37**, 895 (1926).
 - [3] G. Veneziano, Il Nuovo Cimento A **57**, 190 (1968).
 - [4] *Copenhagen Symposium Lectures* (1970), veröffentlicht in Y. Nambu, “Selected Papers,” (1995).
 - [5] T. Gotō, Progress of Theoretical Physics **46**, 1560 (1971).
 - [6] A. M. Polyakov, Phys. Lett. **B103**, 207 (1981).
 - [7] G. t. Hooft, “Introduction to String Theory,” <http://www.staff.science.uu.nl/~hooft101/lectures/stringnotes.pdf>.
 - [8] L. McAllister, “Lectures on String Theory,” <http://www.physics.uci.edu/~tanedo/files/notes/StringNotes.pdf>.
 - [9] D. Berenstein, “Lecture Notes Phys 230A,” http://web.physics.ucsb.edu/~phys230A/w2016/Lecture_notes.html.
 - [10] D. Tong, “Lectures on String Theory,” <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/string.html> (2012), arXiv:0908.0333v3 [hep-th].
 - [11] F. Quevedo, Class.Quant.Grav. **19**, 5721 (2002), arXiv:hep-th/0210292v1 [hep-th].
 - [12] S. M. Carroll, “TASI Lectures: Cosmology for String Theorists,” (2000), arXiv:hep-th/0011110v2 [hep-th].
 - [13] L. McAllister and E. Silverstein, Gen. Rel. Grav. **40**, 565 (2008), arXiv:0710.2951 [hep-th].
 - [14] E. Antonyan, J. A. Harvey, S. Jensen, and D. Kutasov, “NJL and QCD from String Theory,” (2006), arXiv:hep-th/0604017v1 [hep-th].
 - [15] L. Randall and R. Sundrum, Phys.Rev.Lett. **83**, 3370 (1999), arXiv:hep-ph/9905221v1 [hep-ph].
 - [16] M. Gasperini and G. Veneziano, Phys.Rept. **373**, 1 (2003), arXiv:hep-th/0207130v1 [hep-th].
 - [17] G. Veneziano, Physics Letters B **265**, 287 (1991).
 - [18] J. Khoury, B. A. Ovrut, N. Seiberg, P. J. Steinhardt, and N. Turok, Phys.Rev.D **65**, 086007 (2002), arXiv:hep-th/0108187v4 [hep-th]; für Review siehe zB J.-L. Lehners, Phys.Rept. **465**, 223 (2008), arXiv:0806.1245v2 [astro-ph].
 - [19] <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Hyperboloid0fOneSheet.svg> (2011).
 - [20] J. M. Maldacena, Adv.Theor.Math.Phys. **2**, 231 (1998), arXiv:hep-th/9711200v3 [hep-th].
 - [21] https://en.wikipedia.org/wiki/File:Conformal_grid_after_M%C3%B6bius_transformation.svg (2009).
 - [22] S. S. Gubser, D. R. Gulotta, S. S. Pufu, and F. D. Rocha, JHEP **0810**, 052 (2008), arXiv:0803.1470v2 [hep-th].
 - [23] A. Ficnar, S. S. Gubser, and M. Gyulassy, Phys.Lett. B **738**, 464 (2014), arXiv:1311.6160v2 [hep-ph].