5. Übungsblatt zur Vorlesung **WS 2015/2016**
Einführung in die Elementarteilchentheorie **Prof. H. Päs**
Abgabe: bis Fr. 04. Dezember 2015 10:00 Uhr

Aufgabe 1: Trockenübungen für Feynmandiagramme **(7 Punkte)**
In dieser Aufgabe werden diagrammatische Notationen eingeführt, die ähnlich zu den berühmten Feynmanregeln sind. Die einzelnen Diagrammteile sind in Abbildung 1 mit ihrer Bedeutung aufgelistet.

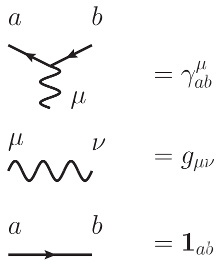
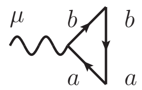
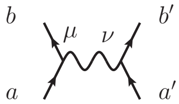


Abbildung 1: Diagrammatische Regeln. Beachten Sie, dass diese "Feynmanregeln" nur zur Übung gedacht sind und die echten Feynmanregeln ein wenig anders ausschauen!

Ein komplettes Diagramm ist aufgebaut aus den Einzelteilen in Abbildung 1. Die Einzelteile werden zusammengeklebt, indem man über die Indizes der Schnittstellen summiert. Die Vertizes (erstes Bild in Abbildung 1) dürfen nur an die Propagatoren (zweites und drittes Bild in Abbildung 1) geklebt werden und umgekehrt. Als Beispiel Übersetzen sich die formalen Diagramme in den mathematischen Ausdruck wie folgt:

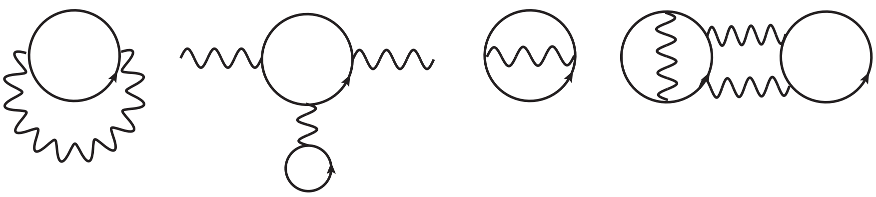


$$\equiv \Sigma_{a,b}\mathbf{1}_{ab}\gamma^{\mu}_{ba} = Tr[\gamma^{\mu}]$$



$$\equiv \Sigma_{\mu\nu}\gamma^{\mu}_{ba}\gamma^{\nu}_{b'a'}g_{\mu\nu} = \gamma^{\mu}_{ba}\gamma_{\mu b'a'}$$

Berechnen Sie in dieser Konvention die Diagramme:



Aufgabe 2: Yukawa Wechselwirkung **(5 Punkte)**
Betrachten Sie die Yukawa Wechselwirkung der skalarer Felder ϕ und der fermionischen (antifermionischen) Felder ψ ($\bar{\psi}$), die durch den Lagrangian

$$\mathscr{L}_{\text{Wechselwirkung}} = -h\bar{\psi}\psi\phi \tag{1}$$

beschrieben wird. Dabei ist h die entsprechende Kopplungskonstante. Geben Sie die zusammenhängenden Feynmandiagramme in niedrigst möglicher Ordnung für $\phi \to \psi\bar{\psi}$, $\psi\psi \to \psi\psi$, $\phi \to \phi\phi$ und $\phi\phi \to \phi\phi$ an.

Aufgabe 3: Wicksches Theorem **(8 Punkte)**
Beweisen Sie das Wicksche Theorem für zwei *fermionische* Felder, d.h. zeigen Sie, dass

$$T\{\psi(x)\overline{\psi}(y)\} = N\{\psi(x)\overline{\psi}(y)\} + \psi(\overbrace{x)\overline{\psi}(}y) \tag{2}$$

mit der Kontraktion zweier fermionischer Felder

$$\psi(\overbrace{x)\overline{\psi}(}y) = \begin{cases} \{\psi^+(x), \overline{\psi}^-(y)\} & \text{für } \; x^0 > y^0 \\ -\{\overline{\psi}^+(y), \psi^-(x)\} & \text{für } \; y^0 > x^0 \end{cases} . \tag{3}$$

Bemerkungen: Für zwei *skalare* Felder lautet die Relation zwischen zeit- und normalgeordnetem Produkt

$$T\{\phi(x)\phi(y)\} = N\{\phi(x)\phi(y) + \phi(\overbrace{x)\phi(}y)\}. \tag{4}$$

Mit $\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x)$ ist die Kontraktion definiert durch

$$\phi(\overbrace{x)\phi(}y) = \begin{cases} [\phi^+(x), \phi^-(y)] & \text{für } \; x^0 > y^0 \\ [\phi^+(y), \phi^-(x)] & \text{für } \; y^0 > x^0 \end{cases} . \tag{5}$$

Das normalgeordnete Produkt ist gegeben durch

$$N\{a_k a_p^\dagger a_q\} = a_p^\dagger a_k a_q, \tag{6}$$

es stehen also alle Vernichter rechts von den Erzeugern.
Um das Wicksche Theorem für Fermionen zu formulieren, müssen das zeitgeordnete und das normalgeordnete Produkt für Fermionen verallgemeinert werden. Das zeitgeordnete Produkt erhält ein Minuszeichen für jeden Austausch von Operatoren:

$$T\{\psi(x)\overline{\psi}(y)\} = \begin{cases} \psi(x)\overline{\psi}(y) & \text{für } \; x^0 > y^0 \\ -\overline{\psi}(y)\psi(x) & \text{für } \; y^0 > x^0 \end{cases} . \tag{7}$$

Gleiches gilt für das normalgeordnete Produkt. Zum Beispiel ist

$$N\{a_k a_q a_p^\dagger\} = (-1)^2 a_p^\dagger a_k a_q. \tag{8}$$

Wegen $\psi^+ \mid 0\rangle = 0$ und $\langle 0 \mid \psi^- = 0$ ist es günstig, eine Aufteilung in positive und negative Frequenzen vorzunehmen:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s [\underbrace{a_{p,s} u_s(p) e^{-ipx}}_{\propto \psi^+(x)} + \underbrace{b_{p,s}^\dagger v_s(p) e^{ipx}}_{\propto \psi^-(x)}], \tag{9}$$

$$\overline{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s [\underbrace{b_{p,s} \overline{v}_s(p) e^{-ipx}}_{\propto \overline{\psi}^+(x)} + \underbrace{a_{p,s}^\dagger \overline{u}_s(p) e^{ipx}}_{\propto \overline{\psi}^-(x)}]. \tag{10}$$