4. Übungsblatt zur Vorlesung **WS 2015/2016**
Einführung in die Elementarteilchentheorie **Prof. H. Päs**
Abgabe: bis Fr. 27. November 2015 10:00 Uhr

Beginn der Übungsgruppen
Gruppe I/II: Mi 11.11. 14-16 Uhr, Raum SRG 1 3.009/3.013
Gruppe III: Mi 11.11. 16-18 Uhr, Raum P1-01-306

Aufgabe 1: QED einmal anders **(12 Punkte)**

Die Lagrangedichte der QED, welche Photonen, geladene Spin 1/2-Fermionen und ihre elektromagnetische Wechselwirkung beschreibt, ist gegeben durch

$$\mathscr{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{\psi}(i\not{D} - m)\psi \tag{1}$$

mit der kovarianten Ableitung $D_\mu = \partial_\mu - ieQA_\mu$. Wir versuchen nun weitere Terme zur lorentzinvarianten Lagrangedichte hinzuzufügen:

$$\mathscr{L}_{\text{QED}} \to \mathscr{L}_{\text{QED}} + \mathscr{L}_1 \tag{2}$$

mit

$$\mathscr{L}_1 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2\lambda}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi F_{\mu\nu} + \overline{\psi}\psi F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu F^{\mu\nu}A_\nu \tag{3}$$

und dem dualen Feldstärketensor $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ sowie den Konstanten m und λ.

(a) Für die QED-Lagrangedichte fordern wir U(1)-Eichinvarianz. Zeigen sie dafür zunächst die Invarianz von $F_{\mu\nu}$ unter der Umdefinition

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\theta. \tag{4}$$

(b) Für die erweiterte QED-Lagrangedichte soll ebenso U(1)-Eichinvarianz gelten. Welche der Terme in (3) brechen diese? Derartige Terme dürfen nicht in der fundamentalen Lagrangedichte auftauchen.

(c) Das mächtigste Instrument zur Einschränkung ist die Forderung nach Renormierbarkeit, die alle Terme mit Massendimension d > 4 verbietet. Benutzen Sie (1), um die kanonische Massendimension der Felder ψ und A_μ zu bestimmen und identifizieren Sie damit die nichtrenormierbaren Anteile in (3).
Hinweis: Die Wirkung $S = \int d^4x(x)$ ist dimensionslos, d.h. d(S)=0. Da die Massendimension einer Länge invers proportional zu einer Masse ist, folgt $d(d^4x) = -4$ und $d(\mathscr{L}) = +4$ sowie $d(D_\mu) = +1$.

(d) Der erste Summand in (3) erfüllt alle gestellten Forderungen. Warum darf er dennoch nicht in (1) vorkommen? Welche in der QED exakte Symmetrie wäre dadurch gebrochen?

Aufgabe 2: Proca-Lagrangian **(8 Punkte)**

Eine Theorie mit massivem Vektorfeld wird beschrieben durch den Proca-Lagrangian

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} M^2 A^\mu A_\mu - A^\mu j_\mu \,.$$

Finden Sie die Bewegungsgleichung und zeigen Sie, dass für diesen Fall der Propagator problemlos definiert werden kann und durch

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2 - M^2} \left(-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{M^2} \right)$$

gegeben ist.