13. Übungsblatt zur Vorlesung **WS 2016/2017**
Einführung in die Elementarteilchentheorie **Prof. G. Hiller**
Abgabe: bis Montag, den 30. Januar 2017 12:00 Uhr

Aufgabe 1: Spontane Symmetriebrechung **(5 Punkte)**
Die folgende Lagrangedichte beschreibt eine skalare Theorie mit einer
globalen $O(3)$-Symmetrie, unter der das Feld $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ wie ein Vektor transformiert:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\nu \phi_i\right)^2 - \frac{1}{2}\mu^2 \phi_i^2 - \frac{1}{4}\lambda\left(\phi_i^2\right)^2 \quad i = 1,2,3. \text{ (Summenkonvention)} \tag{1}$$

Hierbei seien $\mu^2 < 0$ und $\lambda > 0$.

(a) Brechen Sie die Symmetrie hinunter zu einer $O(2)$, indem Sie einen geeigneten Vakuumerwartungswert $\langle\phi\rangle$ finden und zeigen Sie, dass ein massives Teilchen und zwei masselose Goldstone-Bosonen entstehen. Geben Sie die Masse des Teilchens in Abhängigkeit von den Parametern des Potentials an.

(b) Beschreiben Sie die möglichen Wechselwirkungen der Teilchen in der (spontan) gebrochenen Theorie, indem Sie die Vertizes skizzieren.

Aufgabe 2: GSW–Theorie: $SU(2) \times U(1)$ **(8 Punkte)**
Die Elemente der Eichgruppe $SU(2) \times U(1)$ haben die Form

$$U(x) = \exp\left[\mathrm{i}\alpha^a(x)\, t^a\right] \exp\left[\mathrm{i}\frac{\beta(x)}{2}\right], \tag{2}$$

wobei die Generatoren der $SU(2)$ durch die Pauli-Matrizen $\sigma^a = 2t^a$ gegeben sind. Es gilt die Einsteinsche Summenkonvention. Die Eichsymmetrie der GSW-Theorie soll nun spontan gebrochen werden, indem für ein skalares Dublettfeld ϕ der Grundzustand

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \tag{3}$$

gewählt wird.

(a) Zeigen Sie, dass die Eichtransformation

$$U(x) = \exp\left[i\alpha^3(x)\, t^3\right] \exp\left[i\frac{\beta(x)}{2}\right] \tag{4}$$

für bestimmte Phasen $\alpha^3(x)$ und $\beta(x)$ den Grundzustand invariant lässt. Welche Relation muss in diesem Fall zwischen den beiden Phasen gelten?

Die kovariante Ableitung der GSW-Theorie besitzt die Form

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a t^a - ig' Y B_\mu. \tag{5}$$

Die Felder A_μ^a und B_μ sind jeweils die Eichfelder der $SU(2)$ und $U(1)$. Die zugehörigen Masseneigenzustände lauten:

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_\mu^1 \mp i A_\mu^2\right), \tag{6}$$

$$Z^0 = \frac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}\left(g' A_\mu^3 - g B_\mu\right), \tag{7}$$

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}\left(g' A_\mu^3 + g B_\mu\right). \tag{8}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Massen der Felder $W^\pm, Z_\mu^0$ und A_μ durch

$$M_W = g\frac{v}{2}, \quad M_Z = \sqrt{g^2+g'^2}\sqrt{v}2 \quad \text{und} \quad M_A = 0 \tag{9}$$

gegeben sind.

(c) Der schwache Mischungswinkel θ_w verknüpft die Kopplungen g und g':

$$\cos\theta_w = \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}, \qquad \sin\theta_w = \frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}}. \tag{10}$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$\begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_w & -\sin\theta_w \\ \sin\theta_w & \cos\theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^3 \\ B \end{pmatrix}. \tag{11}$$

(d) Wie würden Sie den schwachen Mischungswinkel θ_w messen?

(e) Erklären Sie, wie die Quark-Massen $SU(2) \times U(1)$ die Eichstruktur brechen.

(f) Wie groß ist die Yukawa-Kopplung des Top-Quarks?

Aufgabe 3: Minimum des skalaren Potentials und skalare Massen (7 Punkte)

Gegeben sei ein System zweier reeller, skalarer Felder ϕ_1 und ϕ_2 mit der Lagrangedichte

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\sum_{i=1,2}\left(\partial_\mu\phi_i\right)\left(\partial^\mu\phi_i\right) - V\left(\phi_1,\phi_2\right) \tag{12}$$

sowie dem Potential

$$V\left(\phi_1,\phi_2\right) = \frac{1}{2}\mu_1^2\phi_1^2 + \frac{1}{2}\mu_2^2\phi_2^2 - b\phi_1\phi_2 + \frac{g^2}{8}\left(\phi_2^2-\phi_1^2\right)^2, \tag{13}$$

wobei μ_1^2, μ_2^2, b und g reelle Parameter seien, und $b > 0$. (Dieses System ist dem Higgssektor des minimalen supersymmetrischen Standardmodell, dem MSSM, entlehnt.)

(a) Welche Symmetrien hat das Potential V für $b = 0$ und $b \neq 0$?

(b) Diskutieren Sie das Potential V: Zeigen Sie, dass für spontane Symmetriebrechung gelten muss

$$b^2 > \mu_1^2\mu_2^2 \tag{14}$$

($\phi_1 = \phi_2 = 0$ soll keine stabile Lösung sein) und

$$2b < \mu_1^2 + \mu_2^2. \tag{15}$$

Auch für $|\phi_1| = |\phi_2|$ soll das Potential von unten beschränkt sein, also $V > 0$ für $|\phi_1|, |\phi_2| \to \infty$.

(c) Minimieren Sie das Potential V und geben Sie die Gleichungen für die Vakuumerwartungswerte v_1 und v_2 von ϕ_1 und ϕ_2 am Minimum, ausgedrückt durch $v_1 = v\cos\beta$ und $v_2 = v\sin\beta$, an. Die explizite Lösung dieser Gleichung ist nicht Gegenstand dieser Aufgabe.

(d) Schreiben Sie die Lagrangedichte nach spontaner Symmetriebrechung, d.h., $\phi_1 = v_1 + h_1, \phi_2 = v_2 + h_2$ und nehmen Sie Terme einschließlich 2. Ordnung in den Higgsfeldern h_1 und h_2, also h_1^2, h_2^2 und h_1, h_2, mit. Dieses sind die Massenterme, welche in Matrixform

$$\mathscr{L}_{\text{Masse}} = -\frac{1}{2}\,(h_1, h_2)\, M^2 \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \tag{16}$$

lauten. Bestimmen Sie die Massenmatrix M^2 und anschließend durch Diagonalisierung von M^2 die Masseneigenzustände H_1 und H_2, sowie deren Massen M_1 und M_2.

Vorlesungsseite im Internet:
`http://people.het.physik.tu-dortmund.de/~ghiller/WS1617ETT.html`