11. Übungsblatt zur Vorlesung **WS 2016/2017**
Einführung in die Elementarteilchentheorie **Prof. G. Hiller**
Abgabe: bis Montag, den 16. Januar 2017 12:00 Uhr

Aufgabe 1: Pionen und Kernkräfte **(5 Punkte)**
Ohne jegliche Isospin SU(2) Symmetrie sind die Wechselwirkungen zwischen den verschiedenen Ladungszuständen von Pionen und Nukleonen voneinander völlig unabhängig.

$$\mathscr{L}_{\pi N} = \mathrm{i}\big(g_{pn\pi^+}\bar{p}\gamma_5 n\pi^+ + g_{pn\pi^-}\bar{n}\gamma_5 p\pi^- + g_{pp\pi^0}\bar{p}\gamma_5 p\pi^0 + g_{nn\pi^0}\bar{n}\gamma_5 n\pi^0\big). \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass aufgrund der Isospininvarianz von $\mathscr{L}_{\pi N}$ gilt:

$$g_{pn\pi^+} = g_{np\pi^-} = \sqrt{2}g, \qquad g_{pp\pi^0} = -g_{nn\pi^0} = g. \tag{2}$$

Dabei sei g die Kopplung der SU(2) symmetrischen Lagrangedichte. Beachten Sie, dass wenn man in obiger Notation die auslaufenden Nukleonen und Pionen als Zustände mit $p \sim \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$, $n \sim \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$ interpretiert, in der Isospin-Darstellung von π^+ und $\bar{p}$ Minuszeichen auftreten (also $\bar{p} \sim -\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$ und $\pi^+ \sim -|1,1\rangle$).

Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst, welcher Isospin-Zustand SU(2) invariant ist und konstruieren Sie diesen aus zwei Nukleon- und einem Pion-Isospinzustand.

(b) Obige Relationen erlauben es nun, die nn, pp und np Kräfte miteinander zu vergleichen. Zeigen Sie dafür, dass für das Verhältnis der Streuamplituden für elastische Nukleon-Nukleon-Streuung folgende Relation gilt:

$$T_{pp} : T_{nn} : T_{np} = 1 : 1 : 1. \tag{3}$$

Dies ist die sogenannte *Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte*, d.h. die Kräfte zwischen verschiedenen Nukleonen sind gleich.

Hinweis: Mit Hilfe von Feynman-Diagrammen können Sie sich (im Rahmen des Einpionaustausches gemäß $\mathscr{L}_{\pi N}$) die Beiträge zu $T_{pp} = T_{pp\to pp}$ etc. überlegen.

Aufgabe 2: Lokale Eichinvarianz für nichtabelsche Gruppen **(9 Punkte)**
Lokale Eichtransformationen der Fermionfelder $\Psi = (\Psi_1, ..., \Psi_N)^{\mathrm{T}}$ unter den Elementen g einer Gruppe $G = \mathrm{SU}(N)$ sind durch unitäre Transformationen U_g auf dem Raum der Felder gegeben:

$$\Psi'_i(x) = \sum_{j=1}^{N} \big(U_g(x)\big)_{ij}\Psi(x)_j \text{ mit } \big(U_g(x)\big)_{ij} = \exp\left[\mathrm{i}\sum_{a=1}^{N^2-1}\phi^a(x)T^a_{ij}\right] \approx \delta_{ij} + \mathrm{i}\sum_{a=1}^{N^2-1}\phi^a(x)T^a_{ij}. \tag{4}$$

Hierbei sind $\phi^a(x)$ die lokalen Transformationsparameter und T^a_{ij} die Generatoren der Darstellung der Gruppe G. Im Folgenden wird die Einsteinsche Summenkonvention verwendet. Die Generatoren T^a genügen der Vertauschungsrelation $\left[T^a, T^b\right] = \mathrm{i}f^{abc}T^c$ mit der antisymmetrischen Strukturkonstanten f^{abc}. Man spricht von einer nichtabelschen Gruppe, wenn die Generatoren nicht vertauschen, wenn also $f^{abc} \neq 0$ ist.

Das Prinzip der lokalen Eichinvarianz fordert die Invarianz der Lagrangedichte unter den oben genannten lokalen Eichtransformationen der Fermionfelder Ψ und führt zur Notwendigkeit der Einführung von masselosen Eichfeldern G^a_μ über die kovariante Ableitung $D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}gG^a_\mu T^a$. Die kovariante Ableitung transformiert sich als

$$D'_\mu = U_g D_\mu U_g^{-1}. \tag{5}$$

Analog zur abelschen QED kann ein antisymmetrischer Feldstärketensor für nichtabelsche Eichfelder eingeführt werden, der sich durch einen in den Feldern quadratischen Term von dem QED-Feldstärketensor unterscheidet:

$$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu - g f^{abc} G^b_\mu G^c_\nu. \tag{6}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\left[D_\mu, D_\nu\right] = \mathrm{i}gG^a_{\mu\nu}T^a$ gilt.

(b) Benutzen Sie das Transformationsverhalten von D_μ, um das Transformationsverhalten von $G^a_{\mu\nu}$ herzuleiten.

(c) Zeigen Sie unter Verwendung von b), dass der kinetische Term der nichtabelschen Eichfelder $\mathscr{L}_{\mathrm{kin}} = -\frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu}$ invariant unter Eichtransformationen ist.

Aufgabe 3: Laufende Kopplungskonstanten **(6 Punkte)**

Die Kopplungskonstanten α_i sind in Eichtheorien Impuls- bzw. Skalenabhängig. Ihr Laufen von einer Skala μ_0 zu einer Skala μ folgt der sogenannten Renormierungsgruppengleichung, für welche in niedrigster Ordnung in Störungstheorie gilt:

$$\mu \frac{\mathrm{d}\alpha_i}{\mathrm{d}\mu}(\mu) = -\frac{\beta_0^{(i)}}{2\pi}\alpha_i^2(\mu). \tag{7}$$

Die Koeffizienten $\beta_0^{(i)}$ sind in der starken Wechselwirkung ($i = s$, QCD) und in der elektromagnetischen Wechselwirkung ($i = e$, QED) gegeben als:

$$\beta_0^{(s)} = \frac{11}{3}N_c - \frac{2}{3}N_f, \tag{8}$$

$$\beta_0^{(e)} = -\frac{4}{3}\left(Q_u^2 N_c N_u + Q_d^2 N_c N_d + Q_l^2 N_l\right). \tag{9}$$

Hierbei ist $N_c = 3$ die Anzahl der Farbladungen der Quarks unter SU(3) und N_f die Anzahl der aktiven Quarks. N_u bzw. N_d sind die Anzahl der aktiven Quarks mit Ladung $Q_u = 2/3$ bzw. $Q_d = -1/3$. Die Anzahl der aktiven Leptonen mit $Q_l = -1$ ist N_l.

Bemerkung: Ein Quark bzw. Lepton wird als „ aktiv bei einer Skala μ“ bezeichnet, wenn für seine Masse $m \leq \mu$ gilt. Beachten Sie, dass in sehr guter Näherung die Anschlussbedingung $\alpha_i^{N_f=N}(\mu = m) = \alpha_i^{N_f=N+1}(\mu = m)$ gilt. Überlegen Sie sich die Anzahl der aktiven Quarks/Leptonen an den zu betrachtenden Skalen μ.

(a) Zeigen Sie, dass aus Gleichung (7) folgt:

$$\alpha_i(\mu) = \frac{\alpha_i(\mu_0)}{1 + \frac{\alpha_i(\mu_0)}{4\pi}\beta_0^{(i)}\ln\left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right)}. \tag{10}$$

Was ist der gemessene Wert für $\alpha_s(M_Z)$ bei der Z-Boson Masse M_Z? (http://pdg.lbl.gov/)

(b) Veranschaulichen Sie sich graphisch die Skalenabhängigkeit von α_s für Skalen $\mu < M_Z$. Verwenden Sie zur Vereinfachung eine feste Anzahl an aktiven Quarks, d.h. $N_f = 5$. bei welcher Skala $\mu = \Lambda$ ist $\alpha_s(\mu)$ divergent?

(c) Bei welcher Skala $\mu = \mu_V$ gilt $\alpha_s(\mu_V) = \alpha_e(\mu_V)$?

Vorlesungsseite im Internet:
http://people.het.physik.tu-dortmund.de/~ghiller/WS1617ETT.html