9. Übungsblatt zur Vorlesung **WS 2016/2017**
Einführung in die Elementarteilchentheorie **Prof. G. Hiller**
Abgabe: bis Montag, den 19. Dezember 2016 12:00 Uhr

Aufgabe 1: Wechselwirkungsquerschnitt zum Prozess $q\overline{q} \to Q\overline{Q}$ **(8 Punkte)**

Betrachten Sie jetzt den Prozess $q\overline{q} \to Q\overline{Q}$ mit verschiedenen Quarks q und Q im Anfangs- und Endzustand.

(a) Zeichnen Sie alle Feynmandiagramme, die in niedrigster Ordnung zum Prozess beitragen.

(b) Stellen Sie das Matrixelement $\mathscr{M}_{\text{abcd}}$ auf und zeigen Sie, dass es folgendermaßen faktorisiert:

$$\mathscr{M}_{\text{abcd}} = \mathscr{M}_{\text{Dirac}} \Phi_{\text{abcd}} \tag{1}$$

mit

$$|\mathscr{M}|^2 = |\mathscr{M}_{\text{Dirac}}|^2 |\Phi|^2. \tag{2}$$

Bei Φ_{abcd} handelt es sich um den Farbfaktor der QCD, während $\mathscr{M}_{\text{Dirac}}$ die Dirac-Struktur des Matrixelements darstellt. Die Farbstruktur kann im Allgemeinen immer auf diese Weise abgespalten werden.

Bemerkung: Verwenden Sie folgende Darstellung der QCD-Feynmanregeln zur Berechnung des Matrixelements:

$$\begin{aligned}
\text{Einlaufendes Teilchen:} \quad & q_i(p) \to u(p) e_i \\
\text{Auslaufendes Teilchen:} \quad & q_i(p) \to \overline{u}(p) e_i^\dagger \\
\text{Einlaufendes Antiteilchen:} \quad & \overline{q}_i(p) \to \overline{v}(p) e_i^\dagger \\
\text{Auslaufendes Antiteilchen:} \quad & \overline{q}_i(p) \to v(p) e_i \\
\text{Gluon-Quark-Vertex:} \quad & \Gamma_\mu \to i g_s \gamma_\mu \lambda_A \\
\text{Gluonpropagator in Feynman-Eichung:} \quad & D_F(q^2) \to \frac{-i g^{\mu\nu} \delta^{AB}}{q^2}
\end{aligned}$$

Kleine lateinische Indizes laufen über die drei Einheitsvektoren e_i der **fundamentalen** Darstellungen der SU(3) (**3** und $\overline{\mathbf{3}}$), d.h. sie bezeichnen die Farbindizes der Quarks. Große lateinische Indizes laufen über die **adjungierte** Darstellung der SU(3) (**8**), die aus den Generatoren λ_A gebildet wird. Griechische Indizes bezeichnen Minkowski-Indizes. Es gilt bei allen die übliche Summenkonvention.

(c) Berechnen Sie $|\overline{M}|^2$. Mitteln Sie über Spins und Farbe im Anfangszustand und summieren im Endzustand. Für Ihre Rechnung können Sie das Zwischenergebnis

$$|\overline{M_{\text{Dirac}}}|^2 = g^4(1 + \cos^2\theta) \tag{3}$$

verwenden. Hierbei ist θ der Streuwinkel zwischen dem einlaufenden Quark q und dem auslaufenden Quark Q. Erklären Sie warum Sie es benutzen dürfen und woher es kommt.

Hinweis: Benutzen Sie die Feynman-Spurtechnik für die SU(3)-Struktur. Verwenden Sie die Identität

$$\{\lambda_A, \lambda_B\} = \frac{1}{2\cdot 3}\delta_{AB} + d_{ABC}\lambda_C. \tag{4}$$

Die symmetrischen Strukturkonstanten d_{ABC} sind nicht notwendig für Ihre Rechnung! Begründen Sie warum.

Aufgabe 2: $SU(3)_F$ - Quark-Flavoursymmetrie **(4 Punkte)**

Zeigen Sie, daß die Anwendung der folgenden Darstellung von Isospin I_3, Baryonzahl B und Hyperladung Y

$$I_3 = \frac{\lambda_3}{2}, \qquad B = \frac{1}{3}\,\mathbb{1}_{3\times 3}, \qquad Y = \frac{\lambda_8}{\sqrt{3}} \tag{5}$$

sowie der Strangeness $S = Y - B$, auf $(u,0,0)^T$, $(0,d,0)^T$ und $(0,0,s)^T$ die richtigen Quantenzahlen für die u-, d- und s-Quarks erzeugt. Dabei sind die λ_a, $a = 1,\ldots,8$ die Generatoren der $SU(3)_F$ in der fundamentalen Darstellung, d.h., die Gell-Mann Matrizen.
Hinweis: $\lambda_3 = diag(1,-1,0)$ und $\lambda_8 = 1/\sqrt{3}\,diag(1,1,-2)$.

Aufgabe 3: Adjungierte Darstellung der $SU(N)$ Lie Algebra **(8 Punkte)**

Die Generatoren T^a der $SU(N)$ Gruppe sind hermitesche Operatoren, welche den gesamten Raum der infinitesimalen Gruppentransformationen aufspannen. Der Kommutator zweier Generatoren lässt sich daher als Linearkombination schreiben:

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c, \tag{6}$$

wobei f^{abc} die Strukturkonstanten sind. Der von den Generatoren aufgespannte Vektorraum heißt zusammen mit der Kommutatorrelation (6) die zur Gruppe $SU(N)$ gehörige *Lie Algebra*.

(a) Leiten Sie die *Jacobi Identität*

$$[T^a, [T^b, T^c]] + [T^b, [T^c, T^a]] + [T^c, [T^a, T^b]] = 0 \tag{7}$$

mithilfe der folgenden Beziehung für die Strukturkonstanten her:

$$f^{ade} f^{bcd} + f^{bde} f^{cad} + f^{cde} f^{abd} = 0. \tag{8}$$

(b) Jede einfache Lie Algebra hat eine adjungierte Darstellung. Die entsprechenden Generatoren lassen sich mit den Strukturkonstanten schreiben als:

$$(t^b)_{ac} = i f^{abc}. \tag{9}$$

Zeigen Sie, dass diese Generatoren die folgende Lie Algebra erfüllen:

$$([t^a, t^c])_{be} = i f^{acd} (t^d)_{be}. \tag{10}$$

Benutzen Sie dazu Relation (8) und beachten Sie, dass die Strukturkonstanten antisymmetrisch in ihren ersten beiden Indizes sind: $f^{abc} = -f^{bac}$.

(c) Die quadratische Casimir-Invariante einer Darstellung R ist definiert als

$$C(R)\mathbf{1} = \sum_a (t^a t^a), \tag{11}$$

wobei t^A die Generatoren der Eichgruppe in der Darstellung R bezeichnen. Der Dynkin-Index einer Darstellung R ist gegeben durch:

$$S(R)\delta^{ab} = \mathrm{Tr}(t^a t^b). \tag{12}$$

Zeigen Sie, dass für die adjunguierte Darstellung von $SU(3)$ gilt

$$C(\mathrm{Adj}) = S(\mathrm{Adj}) = 3, \tag{13}$$

unter Beachtung, dass die $SU(3)$ Strukturkonstanten durch

$$f^{123} = 1,\ f^{147} = -f^{156} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = -f^{367} = \frac{1}{2},\ f^{458} = f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tag{14}$$

gegeben sind (alle anderen Strukturkonstanten verschwinden).