6. Übungsblatt zur Vorlesung **WS 2016/2017**
Einführung in die Elementarteilchentheorie **Prof. G. Hiller**
Abgabe: bis Montag, den 29. November 2016 12:00 Uhr

Aufgabe 1: Proca-Lagrangian **(8 Punkte)**

Eine Theorie mit massivem Vektorfeld wird beschrieben durch den sogenannten Proca-Lagrangian

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}M^2 A^\mu A_\mu - A^\mu j_\mu \,. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass der zugehörige Propagator im Impulsraum durch

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{i}{k^2 - M^2}\left(-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{M^2}\right) \tag{2}$$

gegeben ist. Gehen Sie dazu wie folgt vor

a) Stellen Sie die zum Lagrangian (1) gehörige Euler-Lagrange-Gleichung für das Vektorfeld A_μ auf.

b) Der Propagator des Vektorfelds ist abgesehen von der imaginären Einheit eine Greens-Funktion der berechneten Euler-Lagrange-Gleichung. Das heißt, er ist eine Lösung der Gleichung, die man aus der Lagrange-Gleichung durch Ersetzung der Inhomogenität durch $ig^{\mu\nu}\delta^{(4)}(x)$ erhält. Bestimmen Sie ihn, indem Sie die so erhaltene Propagatorgleichung durch eine Fourier-Transformation im Impulsraum schreiben und folgenden Ansatz für die Transformierte des Propagators verwenden:

$$D_{\mu\nu}(k) = a k_\mu k_\nu + b g_{\mu\nu} \,. \tag{3}$$

Hierbei sind a und b noch zu bestimmende Konstanten. Dieser Ansatz ist die allgemeine Form eines Tensors zweiter Stufe, der nur von k abhängt.

Aufgabe 2: Feynmandiagramme: Spielwiese **(6 Punkte)**

In dieser Aufgabe werden diagrammatische Notationen eingeführt, die ähnlich zu den berühmten Feynmanregeln sind. Die einzelnen Diagrammteile sind in Abbildung mit ihrer Bedeutung aufgelistet. Dabei sind a, b Spinorindizes und μ, ν Lorentzindizes. Ein komplet-

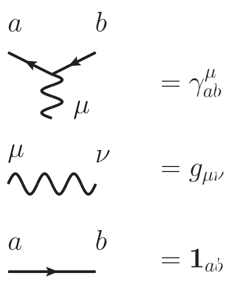
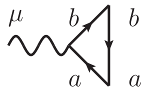
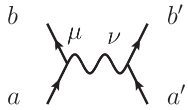


Abbildung 1: Diagrammatische Regeln. Beachten Sie, dass diese "Feynmanregeln" nur zur Übung gedacht sind und die echten Feynmanregeln ein wenig anders ausschauen!

tes Diagramm ist aufgebaut aus den Einzelteilen in Abbildung . Die Einzelteile werden zusammengeklebt, indem man über die Indizes der Schnittstellen summiert. Die Vertizes (erstes Bild in Abbildung) dürfen nur an die Propagatoren (zweites und drittes Bild in Abbildung) geklebt werden und umgekehrt. Auf die Weise können Sie Diagramme konstruieren, welche Sie wiederum in ihre entsprechende mathematischen Ausdrücke transformieren können. Als Beispiel Übersetzen sich die formalen Diagramme in den mathematischen Ausdruck wie folgt:

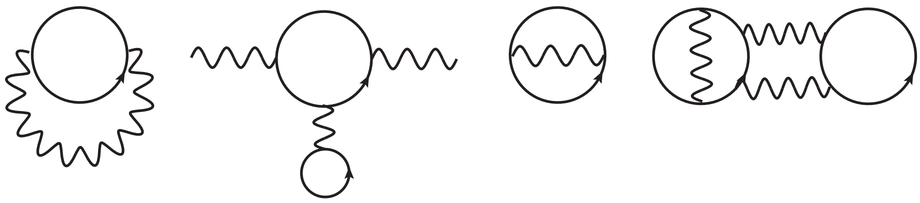


$$\equiv \Sigma_{a,b} \mathbf{1}_{ab} \gamma^{\mu}_{ba} = Tr[\gamma^{\mu}]$$



$$\equiv \Sigma_{\mu\nu} \gamma^{\mu}_{ba} \gamma^{\nu}_{b'a'} g_{\mu\nu} = \gamma^{\mu}_{ba} \gamma_{\mu b'a'}$$

Dabei folgen Sie Linien mit Pfeilen entgegen ihrer Pfeilrichtung. Berechnen Sie in dieser Konvention die Diagramme:



Aufgabe 3: Erweiterte QED: Was alles (nicht) möglich ist **(6 Punkte)**

Die Lagrangedichte der QED, welche Photonen, geladene Spin 1/2-Fermionen und ihre elektromagnetische Wechselwirkung beschreibt, ist gegeben durch

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \overline{\psi}(i\not{D} - m)\psi \tag{4}$$

mit der kovarianten Ableitung $D_\mu = \partial_\mu - ieQA_\mu$. Wir versuchen nun weitere Terme zur lorentzinvarianten QED-Lagrangedichte hinzuzufügen:

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} \to \mathcal{L}_{\text{QED}} + \mathcal{L}_1 \tag{5}$$

mit dem lorentzinvarianten Lagrangian

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2\lambda} (\partial_\mu A^\mu)^2 + \overline{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi F_{\mu\nu} + \overline{\psi} \psi F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu F^{\mu\nu} A_\nu \tag{6}$$

und dem dualen Feldstärketensor $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$ sowie den Konstanten m und λ.

a) Für die erweiterte QED-Lagrangedichte soll $U(1)$-Eichinvarianz gelten. Welche der Terme in Gleichung (6) brechen diese? Derartige Terme dürfen nicht in der fundamentalen Lagrangedichte auftauchen.

b) Das mächtigste Instrument zur Einschränkung ist die Forderung nach Renormierbarkeit einer Quantenfeldtheorie im 3+1 Minkowskiraum, die alle Terme mit Massendimension d > 4 verbietet. Benutzen Sie Gleichung (4), um die kanonische Massendimension der Felder ψ und A_μ zu bestimmen und identifizieren Sie damit die nichtrenormierbaren Anteile in Gleichung (6).
Hinweis: Die Wirkung $S = \int d^4x(x)$ ist dimensionslos, d.h. $[S] = 0$. Da die Massendimension einer Länge invers proportional zu einer Masse ist, folgt $[d^4x] = -4$ und $[\mathcal{L}] = +4$ sowie $[D_\mu] = +1$.

c) Der erste Summand in Gleichung (6) erfüllt alle gestellten Forderungen. Warum darf er dennoch nicht in Gleichung (4) vorkommen? Welche in der QED exakte Symmetrie wäre dadurch gebrochen? Was ist mit dem letzten Summanden in Gleichung (4)?

d) Finden Sie einen Ausdruck K^μ, sodass die folgende Relation erfüllt ist:

$$F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu K^\mu \,. \tag{7}$$

Warum können Sie einen Term der Form $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ vernachlässigen?

Vorlesungsseite im Internet:
`http://people.het.physik.tu-dortmund.de/~ghiller/WS1617ETT.html`