12. Übungsblatt zur Vorlesung **SS 2017**
Theoretische Physik II **Prof. G. Hiller**
Abgabe: bis Donnerstag, den 06. Juli 2017 14:00 Uhr

Aufgabe 1: Ein Spin im Magnetfeld **(6 Punkte)**
Der Hamiltonoperator eines Spins im Magnetfeld lautet

$$\hat{H} = -g_e \mu_B \vec{S}\vec{B} \quad . \tag{1}$$

Das Magnetfeld zeige in z-Richtung, $\vec{B} = B\vec{e}_Z$. Der Spin sei zum Zeitpunk $t = 0$ im Zustand $|S\rangle = c_1 |\uparrow\rangle + c_2 |\downarrow\rangle$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(a) Geben Sie den Hamiltonoperator und den Zeitentwicklungsoperator in Matrixschreibweise mit den Spinoren $|\uparrow\rangle = (1,0)^T$ und $|\downarrow\rangle = (0,1)^T$ an.

(b) Bestimmen Sie $|S(t)\rangle$ im Schrödingerbild und berechnen Sie die Erwartungswerte der Operatoren S_x, S_y und S_z in diesem Zustand. Wie lautet die Normierungsbedingung für $|S(t)\rangle$?

(c) Beschreiben Sie die physikalische Bewegung von $\langle \vec{S} \rangle (t)$. Was passiert, wenn das Magnetfeld sein Vorzeichen ändert?

Aufgabe 2: Pauli-Gleichung **(8 Punkte)**
Eine Möglichkeit die Pauli-Gleichung darzustellen sieht folgendermaßen aus:

$$\left(\frac{1}{2m} \left(\boldsymbol{\vec{\sigma}} \left(\vec{p} - q\vec{A} \right) \right)^2 + q\phi \right) |\Psi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle , \tag{2}$$

wobei $\vec{\sigma}$ einen Vektor bestehend aus den drei Pauli-Matrizen beschreibt.

(a) Machen Sie sich anhand der Dimension des Hamiltonoperators klar, wieviele Komponenten $|\Psi\rangle$ haben muss.

(b) In welchem Fall entspricht (2) der Schrödingergleichung?

(c) Zeigen Sie mit den Ihnen bereits bekannten Eigenschaften der Pauli-Matrizen

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbf{1} \tag{3}$$
$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \sum_k \epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{4}$$

dass für ein allgemeines $\vec{U}$ und $\vec{V}$

$$(\boldsymbol{\vec{\sigma}} \cdot \vec{U})(\boldsymbol{\vec{\sigma}} \cdot \vec{V}) = \vec{U}\vec{V}\mathbf{1} + i\boldsymbol{\vec{\sigma}}(\vec{U} \times \vec{V}) \tag{5}$$

gilt.

(d) Wieso gilt für vektorielle Operatoren $\vec{U}$ nicht unbedingt $\vec{U} \times \vec{U} = 0$? Berechnen Sie $\vec{p} \times \vec{p}$ und zeigen Sie

$$(\vec{p} - q\vec{A}) \times (\vec{p} - q\vec{A}) = iq\hbar\vec{B}, \tag{6}$$

bzw.

$$[(\vec{p} - q\vec{A}) \times (\vec{p} - q\vec{A})]_i |\Psi\rangle = iq\hbar\vec{B}_i |\Psi\rangle , \tag{7}$$

wobei $\vec{B}$ das zu $\vec{A}$ gehörende Magnetfeld ist.

(e) Folgern Sie aus Ihren bisherigen Ergebnissen

$$\left(\frac{(\vec{p}-q\vec{A})^2}{2m} - \frac{q\hbar}{2m}\vec{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\vec{B} + q\Phi\right)|\Psi\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle \tag{8}$$

und daraus das gyromagnetische Verhältnis, indem Sie (8) mit

$$H_{\mathrm{mag}} = -\frac{q g_e \hbar}{4m}\vec{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\vec{B} \tag{9}$$

vergleichen.

Webseite zur Vorlesung:
`http://people.het.physik.tu-dortmund.de/~ghiller/TH2-SS2017.html`