Vorlesung zur Quantenfeldtheorie — SoSe 2019

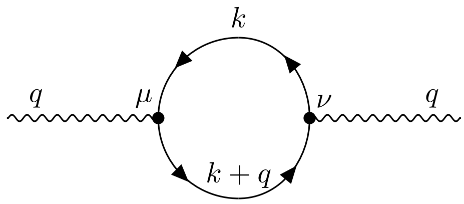
11. Übungsblatt

Prof. Dr. Gudrun Hiller

Ausgabe: Donnerstag, den 27.06.2019
Abgabe: Dienstag, den 02.07.2019, 11 Uhr — Übungsleiter: Rigo Bause und Kevin Moch

Aufgabe 1: Photon-Selbstenergie in der QED — 20 Punkte

Berechnen Sie die Photon-Selbstenergie, die im Diagramm (1) dargestellt ist. Gehen Sie dabei wie folgt vor:



(1)

- Zeigen Sie durch Anwendung der QED-Feynman-Regeln auf das Diagramm (1), dass die Vakuumpolarisation induziert durch Elektron-Positron Paare durch

$$\mathrm{i}\,\Pi^{\mu\nu}(q) = -(-\mathrm{i}e)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Tr}\left(\frac{\mathrm{i}\left(\not{k}+\not{q}+m\right)}{(k+q)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon}\gamma^\mu \frac{\mathrm{i}\left(\not{k}+m\right)}{k^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon}\gamma^\nu\right) \tag{2}$$

gegeben ist. m sei die Elektronmasse. Beachten Sie dabei, dass eine Fermionschleife aufgrund der Struktur der Spinorindizes eine Spur ergibt.

- Benutzen Sie den Feynman-Trick, d.h. stellen Sie $\Pi^{\mu\nu}(q)$ mittels Feynman-Parameter x dar:

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = \int_0^1 \mathrm{d}x\, I^{\mu\nu}(q,x) \quad . \tag{3}$$

- Bilden Sie die Spur über die Dirac-Matrizen $\left(\{\gamma^\mu,\, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\right)$ der geschlossenen Fermion-Schleife und reparametrisieren Sie anschließend den Schleifenimpuls $k \longrightarrow k + xq$.

- Regularisieren Sie das Integral $I^{\mu\nu}(q,x) \xrightarrow{D=4-2\delta} I^{\mu\nu}(q,x,\delta)$ dimensional und berechnen Sie dieses mittels folgender Master-Integrale:

$$\int \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D}\,\frac{1}{(k^2-a)^n} = \frac{\mathrm{i}}{16\pi^2}\,\frac{\Gamma(n-2+\delta)}{\Gamma(n)}\left(-\frac{1}{a}\right)^{n-2}\left(\frac{4\pi}{a}\right)^{\delta} \quad , \tag{4}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D}\,\frac{k^\mu}{(k^2-a)^n} = 0 \quad , \tag{5}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D}\,\frac{k^2}{(k^2-a)^n} = \frac{\mathrm{i}\,(2-\delta)}{16\pi^2}\,\frac{\Gamma(n-3+\delta)}{\Gamma(n)}\left(-\frac{1}{a}\right)^{n-3}\left(\frac{4\pi}{a}\right)^{\delta} \quad , \tag{6}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D}\,\frac{k^\mu k^\nu}{(k^2-a)^n} = \frac{\mathrm{i}\,g^{\mu\nu}}{32\pi^2}\,\frac{\Gamma(n-3+\delta)}{\Gamma(n)}\left(-\frac{1}{a}\right)^{n-3}\left(\frac{4\pi}{a}\right)^{\delta} \quad . \tag{7}$$

- Stellen Sie die Ausdrücke durch eine Laurent-Reihe dar und vernachlässigen Sie Terme $\mathcal{O}(\delta)$. Zeigen Sie nun, dass:

$$\Pi^{\mu\nu}(q^2, \delta) = -\Pi(q^2, \delta)\, P_T^{\mu\nu} \quad , \tag{8}$$

  mit

$$P_T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu \quad , \tag{9}$$

$$\Pi(q^2, \delta) = \frac{\alpha_e}{3\pi}\left(\frac{1}{\delta} - \gamma\right) + \frac{2\alpha_e}{\pi}\int_0^1 \mathrm{d}x\, x\,(1-x)\, \ln\!\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2 - x\,(1-x)\,q^2}\right) \quad , \tag{10}$$

  $\alpha_e = {}^{e^2}\!/\!{(4\pi)}$ und einem Massenparameter μ. Welche Identität gilt für $q_\mu\, \Pi^{\mu\nu}(q^2, \delta)$?

- Betrachten Sie den freien Photon-Propagator,

$$D_{F,\mu\nu} = -\mathrm{i}\, \frac{g_{\mu\nu} - (1-\xi)\, \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}}{q^2} \quad , \tag{11}$$

  in der Feynman-Eichung $\xi = 1$. Bestimmen Sie den vollen Propagator via Summation aller 1PI-Diagramme (Absorbieren Sie dabei Terme $\sim q^\mu q^\nu$ in die Eichung). Was ist die Masse? Bestimmen Sie die Renormierungskonstante.