11. Übungsblatt zur Vorlesung **SS 2017**
Theoretische Physik II **Prof. G. Hiller**
Abgabe: bis Donnerstag, den 29. Juni 2017 14:00 Uhr

Aufgabe 1: Wiederholung: Hamiltonfunktion im EM-Feld **(5 Punkte)**
Im Folgenden soll die Hamiltonfunktion und der kanonische Impuls im elektromagnetischen Feld hergeleitet werden.

(a) Bringen Sie die Lorentzkraft, die auf ein Elektron im elektrischen Potential ϕ und Vektorpotential $\vec{A}$ wirkt, auf die Form

$$\vec{F}_L = -e\vec{\nabla}(\phi - \vec{v}\vec{A}) - e\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - e(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{A} \quad . \tag{1}$$

(b) Leiten Sie mithilfe des zweiten Newtonschen Axioms und der totalen Ableitung des Vektorpotentials nach der Zeit die Relation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v} + e\vec{A}) = -\vec{\nabla}(e\phi - e\vec{v}\vec{A}) \tag{2}$$

her. Identifizieren Sie den generalisierten Impuls und die generalisierte Kraft.

(c) Leiten Sie aus den Ergebnissen aus (b) die Lagrangefunktion eines Elektrons im elektromagnetischen Feld her.

(d) Berechnen Sie die Hamiltonfunktion aus der Lagrangefunktion.

Aufgabe 2: Laundau-Niveau im äußeren Potential **(6 Punkte)**
Es wird die quantenmechanische Bewegung eines Teilchens der Masse m und Ladung q in der xy-Ebene unter dem Einfluss eines Magnetfeldes der Stärke B in z-Richtung untersucht. Zusätzlich soll ein harmonisches Potential $V(x,y) = \frac{m}{2}\alpha^2 y^2$ in y-Richtung vorliegen, wobei α die Stärke des Potentials parametrisiert.

a) Zeigen Sie, dass das Vektorpotential

$$\mathbf{A}_L(x,y,z) = \begin{pmatrix} -yB \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

ein Magnetfeld der Stärke B entlang der z-Richtung generiert und geben Sie den Hamiltonoperator in Ortsdarstellung an. Betrachten Sie für den Hamiltonoperator nur die x- und y-Koordinate. Gäbe es weitere Vektorpotentiale, die ein solches Magnetfeld generieren? Warum?

b) Machen Sie einen Lösungsansatz für die Schrödingergleichung in Ortsdarstellung der Form

$$\psi(x,y) = Ce^{ik_x x} f(y) \tag{4}$$

und leiten Sie die bestimmende DGL für die Funktion $f(y)$ ab.

c) Zeigen Sie, dass die DGL für $f(y)$ als DGL eines harmonischen Oszillators mit verschobener y-Koordinate, Frequenz und verschobenem Energieeigenwert von $\psi(x,y)$ geschrieben werden kann. Geben Sie die Wellenfunktion $\psi(x,y)$ und die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens explizit an.

d) Überzeugen Sie sich davon, dass sich die Lösung für $\alpha/B = 0$ auf die Landau-Niveaus reduziert. Was erhält man für $B/\alpha = 0$?

Aufgabe 3: Drehimpulsaddition (Clebsch-Gordan-Koeffizienten) (6 Punkte)
Zwei Drehimpulse $\vec{J}_1$ und $\vec{J}_2$ mit Quantenzahlen (j_1, m_1) und (j_2, m_2) sollen zu einem Gesamtdrehimpuls $\vec{J}$ mit Quantenzahlen (j, m) addiert werden. Hierbei entsprechen j, j_1, j_2 den Quantenzahlen der Beträge der jeweiligen Drehimpulse und m, m_1, m_2 denen der z-Komponenten. Die möglichen Werte der Quantenzahlen können durch

$$\left| j, m \right\rangle = \sum_{m_1, m_2} c_{m_1, m_2} \left| m_1, m_2 \right\rangle . \tag{5}$$

mittels der Clebsch-Gordan-Koeffizienten c_{m_1,m_2} dargestellt werden.

(a) Berechnen Sie die Clebsch-Gordan-Koeffizienten c_{m_1,m_2} für $j_1 = 1$ und $j_2 = 1$. Starten Sie dafür mit dem höchsten Gesamtdrehimpulszustand und ermitteln sie die weiteren durch Anwenden des Absteigeoperators

$$\hat{J}_- \left| j, m \right\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - (m(m-1))} \left| j, m-1 \right\rangle \quad . \tag{6}$$

Überlegen Sie sich, welche Zustände senkrecht auf einander stehen und welche Schlüsse Sie daraus ziehen können.

(b) Betrachten Sie die Multiplizität $M_j = 2j+1$ der erzeugten Multiplets und vergleichen Sie diese mit der Multiplizität der Ausgangszustände mit $j_1 = 1$ und $j_2 = 1$.

(c) Welche Zustände sind symmetrisch bzw. antisymmetrisch unter der Vertauschung von j_1 und j_2?

(d) Machen Sie sich mit der angehängten Tabelle der Clebsch-Gordan-Koeffizienten vertraut (siehe Abb. 1) . Erklären Sie kurz, wie man die Koeffizienten abliest und überprüfen Sie ihr Rechenergebnis aus Aufgabenteil (a).

Aufgabe 4: Bohrscher Radius und Grundzustandsenergie (3 Punkte)
Berechnen Sie den Bohrschen Radius a_0 und die Grundzustandsenergie E_R für verschiedene wasserstoffartige Systeme (Zahlenwerte!). Es gilt

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{mZe^2} \quad \text{und} \quad E_\mathrm{R} = \frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2(4\pi\epsilon_0)^2} \tag{7}$$

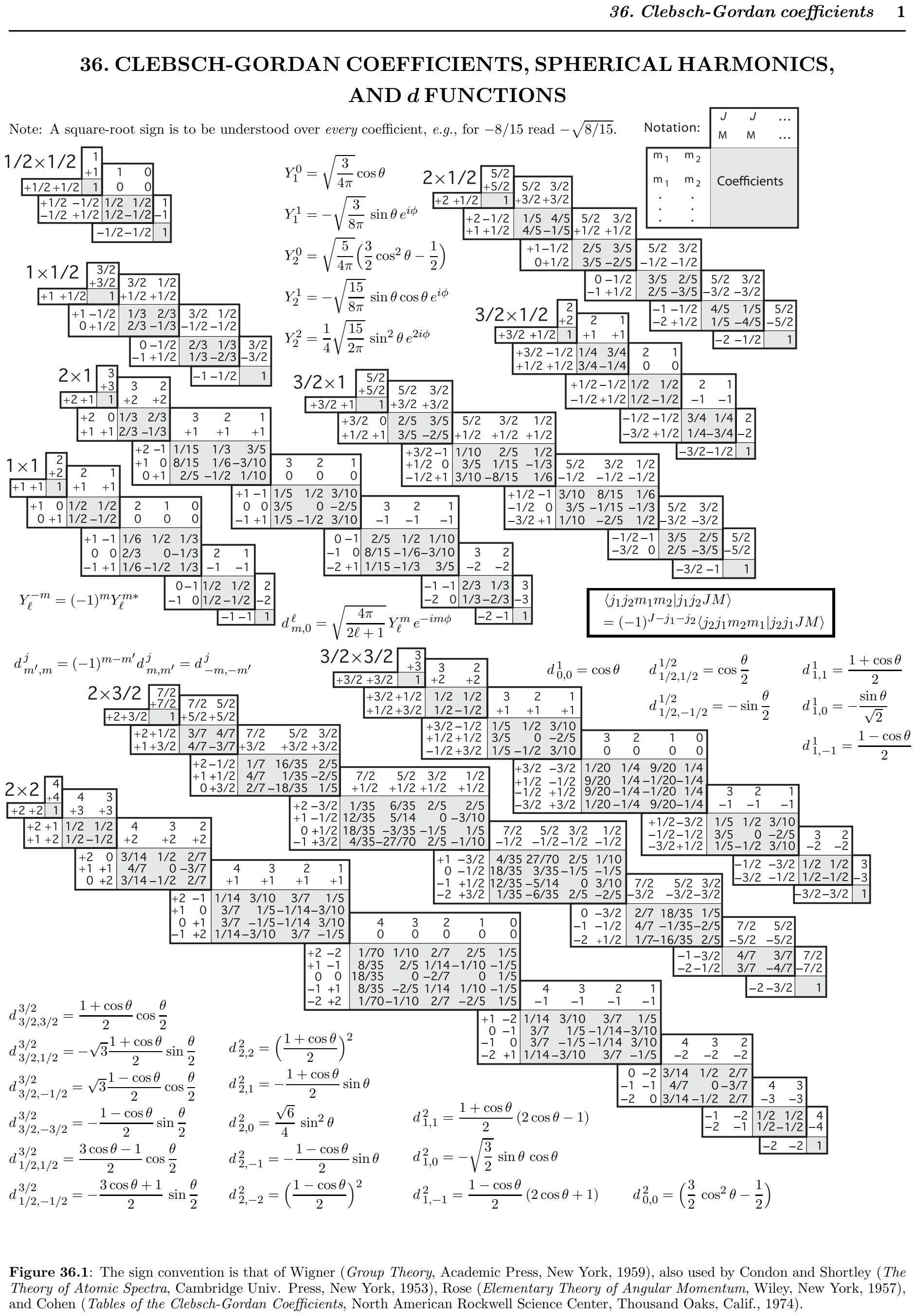
mit der reduzierten Masse $\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$.

(a) Wasserstoff und Positronium (Elektron-Positron-System)

(b) Myonischer Wasserstoff (Ersetzen Sie das Elektron im Wasserstoff durch ein Myon: $m_\mu = 206.8 m_e$.)

(c) He^+ -Ion

Webseite zur Vorlesung:
`http://people.het.physik.tu-dortmund.de/~ghiller/TH2-SS2017.html`



36. Clebsch-Gordan coefficients 1

36. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi}$$

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$$

$$d_{m,0}^\ell = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\, Y_\ell^m\, e^{-im\phi}$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M\rangle = (-1)^{J-j_1-j_2}\langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M\rangle$$

$$d_{m',m}^j = (-1)^{m-m'} d_{m,m'}^j = d_{-m,-m'}^j$$

$$d_{0,0}^1 = \cos\theta \qquad d_{1/2,1/2}^{1/2} = \cos\frac{\theta}{2} \qquad d_{1/2,-1/2}^{1/2} = -\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d_{1,1}^1 = \frac{1+\cos\theta}{2} \qquad d_{1,0}^1 = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \qquad d_{1,-1}^1 = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$d_{3/2,3/2}^{3/2} = \frac{1+\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d_{3/2,1/2}^{3/2} = -\sqrt{3}\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d_{3/2,-1/2}^{3/2} = \sqrt{3}\frac{1-\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d_{3/2,-3/2}^{3/2} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d_{1/2,1/2}^{3/2} = \frac{3\cos\theta-1}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d_{1/2,-1/2}^{3/2} = -\frac{3\cos\theta+1}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d_{2,2}^2 = \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2 \qquad d_{2,1}^2 = -\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\theta \qquad d_{2,0}^2 = \frac{\sqrt{6}}{4}\sin^2\theta$$

$$d_{2,-1}^2 = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\theta \qquad d_{2,-2}^2 = \left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^2$$

$$d_{1,1}^2 = \frac{1+\cos\theta}{2}(2\cos\theta - 1) \qquad d_{1,0}^2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta\cos\theta \qquad d_{1,-1}^2 = \frac{1-\cos\theta}{2}(2\cos\theta+1)$$

$$d_{0,0}^2 = \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$$

Figure 36.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974).

Abbildung 1: http://pdg.lbl.gov/2002/clebrpp.pdf