Vorlesung zur Quantenfeldtheorie — SoSe 2019
10. Übungsblatt

Prof. Dr. Gudrun Hiller

Ausgabe: Donnerstag, den 20.06.2019
Abgabe: Dienstag, den 25.06.2019, 11 Uhr — Übungsleiter: Rigo Bause und Kevin Moch

---

Aufgabe 1: Eigenschaften der Gammafunktion — 6 Punkte

Die Gammafunktion sei definiert als

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}(z) > 0. \tag{1}$$

a) Äquivalent kann die Gammafunktion als Lösung der Gleichung

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \mathrm{Re}(z) > 0 \tag{2}$$

mit $\Gamma(1) = 1$ definiert werden.
Zeigen Sie, dass Gleichung (1) diese Definition erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass die Gammafunktion für $\varepsilon \ll 1$ entwickelt werden kann als

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{3}$$

wobei $\gamma = -\frac{\mathrm{d}\Gamma(z)}{\mathrm{d}z}\Big|_{z=1}$ die Euler-Konstante ist.

c) Berechnen Sie die Oberfläche der D-dimensionalen Einheitskugel

$$\int \mathrm{d}\Omega_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \tag{4}$$

mit Hilfe des Gauß-Integrals $\prod_i^D = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_i \mathrm{e}^{-x_i^2}$.

Aufgabe 2: Masse als Selbstwechselwirkung — 3 Punkte

In dieser Aufgabe wird der Massenterm einer skalaren Feldtheorie als Selbswechselwirkung aufgefasst. Die freie Theorie ist durch ein masseloses Skalarfeld gegeben. Betrachten Sie also die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}} \tag{5}$$

mit

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\left(\partial^\mu \varphi\right)\left(\partial_\mu \varphi\right), \quad \mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{1}{2} m^2 \varphi^2. \tag{6}$$

a) Geben Sie den Propagator der freien, masselosen Theorie $\mathcal{L}_0$, sowie das Feynmandiagramm und die dazugehörige Feynmanregel für den Vertex aus $\mathcal{L}_{\text{int}}$ an.

b) Berechnen Sie nun den vollen Propagator der Theorie $\mathcal{L}$, indem sie alle Diagramme der 2-Punkt Funktion aufsummieren.

Aufgabe 3: Kurzfragen — 6 Punkte

a) Wie können aus dem Funktionalintegral $Z[J]$ Übergangsamplituden $\langle f|i\rangle$ von ein- und auslaufenden Zuständen $|i\rangle$ und $|f\rangle$ berechnet werden?

b) Wann kann im (bosonischen) Pfadintegral/Funktionalintegral die Impulsintegration direkt durchgeführt werden?

c) Wie wird die Normierung des Funktionalintegrals $Z[J]$ garantiert, wenn man dieses als Summe $Z[J] = \exp\left(\sum_I c_I\right)$ über alle zusammenhängenden Diagramme c_I schreibt?