10. Übungsblatt zur Vorlesung **SS 2017**
Theoretische Physik II **Prof. G. Hiller**
Abgabe: bis Donnerstag, den 22. Juni 2017 14:00 Uhr

Aufgabe 1: Wellenfunktionen des H-Atoms **(7 Punkte)**
Gegeben seien die Wellenfunktionen des Wasserstoffatoms

$$\psi_{nlm}(r,\vartheta,\varphi) = R_{nl}(r)\,Y_l^m(\vartheta,\varphi)\ . \tag{1}$$

Für die Quantenzahlen $n = 1$, $l = 0$ bzw. $n = 2$, $l = 0$ lautet der Radialanteil R_{nl}

$$R_{10} = 2a_0^{-3/2}\exp\left\{\left(-\frac{r}{a_0}\right)\right\}, \tag{2}$$

$$R_{20} = \frac{a_0^{-3/2}}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{r}{2a_0}\right)\exp\left\{\left(-\frac{r}{2a_0}\right)\right\}. \tag{3}$$

(a) Berechnen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons $P(r)$ als Funktion des Abstandes r vom Kern – also die Wahrscheinlichkeit, das Elektron in einer Kugelschale zwischen r und $r + dr$ anzutreffen – für den $1s$- und den $2s$-Zustand. Beachten Sie, dass die Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\vartheta,\varphi)$ orthogonal zueinander sind!

(b) Berechnen Sie den wahrscheinlichsten und den mittleren Abstand zwischen Elektron und Kern für beide Zustände und vergleichen Sie die Werte mit dem Bohrschen Radius a_0 .

(c) Skizzieren Sie die Radialanteile R_{10}, R_{20} der Wellenfunktionen und die in a) berechneten dazugehörige Aufenthaltswahrscheinlichkeit $P(r)$.

Tipp:

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n \exp\{(-x)\}\mathrm{d}x,\, n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

Aufgabe 2: Die Balmer-Serie **(5 Punkte)**
Die Balmer-Serie des Wasserstoffatoms wird über

$$\nu = \frac{1}{\lambda} = R_\infty\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n_2^2}\right) \tag{5}$$

mit

$$R_\infty \approx 1,097\cdot 10^7\, m^{-1} \tag{6}$$

beschrieben. Sie wurde später zur Rydberg-Formel

$$\nu = R\left(\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{n_2^2}\right) \tag{7}$$

mit $n_1 = 1, 2, ...$ und $n_2 \geq n_1 + 1$, sowie

$$R = \frac{R_\infty}{1+\frac{m_e}{M}} \approx R_\infty \tag{8}$$

verallgemeinert.

(a) Welches Phänomen beschreibt die Balmer-Serie?

(b) Berechnen Sie die ersten drei Wellenlängen, die durch die Balmer-Serie beschrieben werden. Bestimmen Sie außerdem die zugehörigen Energien, sowie die Ionisierungsenergie, also die Energie die benötigt wird, um ein Elektron aus dem Atom zu lösen.

(c) Warum wurde zunächst nur die Balmer-Serie ($n_1 = 2$) beobachtet und nicht zum Beispiel die Lyman-Serie ($n_1 = 1$) oder die Paschen-Serie ($n_1 = 3$), die mithilfe der Rydberg-Formel (7) beschrieben werden. Es könnte hilfreich sein einige Wellenlängen zu berechnen.

Aufgabe 3: Verständnisfragen zum Wasserstoffatom (8 Punkte)

Der Hamiltonoperator, der die Bewegung eines Elektrons um den Atomkern beschreibt, lautet

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - V_c(r) \tag{9}$$

mit der reduzierten Masse $m \approx m_e$ und dem Coulombpotential V_c

$$V_c = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \tag{10}$$

wobei Z die Kernladungszahl ist. Der Laplace-Operator in Polarkoordinaten ist gegeben durch:

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial_r^2} r - \frac{1}{r^2\hbar^2}\hat{L}^2. \tag{11}$$

(a) Passen Sie das Coulombpotential an das Wasserstoffatom an.
Wieso werden zum Lösen des Wasserstoffproblems Polarkoordinaten verwendet?

(b) Stellen Sie die stationäre Schrödingergleichung auf und identifizieren Sie die kinetische und potentielle Energie.

(c) Verwenden Sie den Separationsansatz

$$\Psi_{n,l,m}(r,\theta,\phi) = R_{nl}(r)Y_{l,m}(\theta,\phi) \tag{12}$$

und wenden Sie $\hat{L}^2$ an.

(d) Aus der entstandenen Gleichung kann der Radialanteil separiert werden. Dieser lässt sich darstellen als

$$\frac{d^2}{dr^2}(r \cdot R(r)) - \frac{2m}{\hbar^2}V_{\text{eff}}(r) \cdot r \cdot R(r) = -\frac{2mE}{\hbar^2} r \cdot R(r), \tag{13}$$

mit dem effektiven Potential

$$V_{\text{eff}}(r) = V_l(r) - V_c(r) = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} - V_c(r). \tag{14}$$

Die Lösung ist somit nur noch von dem Radialanteil $R_{n,l}(r)$ abhängig.
Was folgt hierraus für die Lösungen des Wasserstoffproblems in Hinblick auf die Quantenzahl m?

(e) Skizzieren Sie $V_{\text{eff}}(r)$, $V_l(r)$ und $V_c(r)$. In welchem Bereich entstehen gebundene Zustände? Welches Potential wird durch $V_l(r)$ beschrieben?

(f) Die Energieeigenwerte eines wasserstoffähnlichen Atom berechen sich über

$$E_n = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 a}\frac{1}{n^2} = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}\frac{1}{n^2}. \tag{15}$$

Berechnen Sie den Bohrschen Radius a_0, indem Sie a für ein Wasserstoffatom bestimmen.

(g) Das H-Atom besteht aus einem Elektron welches um einen entgegengesetzt geladenen Kern kreist. Warum ist es nach den Gesetzen der klassischen Physik instabil?

Webseite zur Vorlesung:
`http://people.het.physik.tu-dortmund.de/~ghiller/TH2-SS2017.html`