

**Aufgabe 1: Wellengleichungen** (5 Punkte)

Folgern Sie aus den Maxwell-Gleichungen für das Vakuum die Wellengleichungen

$$\square \vec{E} = \vec{0}, \quad \square \vec{B} = \vec{0} \quad (1)$$

für das elektrische Feld  $\vec{E}$ , das Magnetfeld  $\vec{B}$  und dem d'Alembert-Operator

$$\square \equiv \Delta - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Welche physikalische Bedeutung hat der Parameter  $u$ ?

**Aufgabe 2: Kugelwellen** (5 Punkte)

Betrachten Sie eine kugelsymmetrische Lösung  $\psi(r, t)$  der homogenen Wellengleichung. Der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten ist

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (3)$$

Substituieren Sie  $v(r, t) = r \psi(r, t)$  und folgern Sie die Differentialgleichung

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) v(r, t) = 0. \quad (4)$$

Zeigen Sie, dass der Ansatz  $v(r, t) = v_+(kr + \omega t) + v_-(kr - \omega t)$  mit der Wellenzahl  $k$  und der Kreisfrequenz  $\omega$  die Gleichung (4) löst und bestimmen Sie die Dispersionsrelation  $\omega(k)$ .

**Aufgabe 3: Ebene Wellen** (5 Punkte)

Gegeben sei eine Lösung  $\psi(\vec{r}, t) = f_+(\phi_+) + f_-(\phi_-)$  der Wellengleichung mit den Phasen  $\phi_{\pm}(\vec{r}, t) = \vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t$ .

- (a) Bestimmen Sie die Form der Flächen gleicher Phase zu einem fixierten Zeitpunkt. Betrachten Sie nun die Bewegung der Flächen gleicher Phase und bestimmen Sie die Phasengeschwindigkeit. Welche physikalischen Bedeutungen haben die Lösungen  $f_{\pm}$ ?
- (b) Betrachten Sie eine elektromagnetische Welle mit den Feldern

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{E} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \hat{B} e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t)}. \quad (5)$$

Bestimmen Sie die Relationen zwischen den jeweiligen Wellenvektoren, sowie den jeweiligen Kreisfrequenzen. Berechnen Sie weiterhin  $\vec{k} \times \hat{E}$ ,  $\vec{k} \times \hat{B}$ ,  $\vec{k} \cdot \hat{E}$  und  $\vec{k} \cdot \hat{B}$ .

**Aufgabe 4: Polarisationen****(5 Punkte)**

Betrachten Sie das elektrische Feld  $\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y$  mit

$$E_x = |\hat{E}_x| \cos(kz - \omega t + \phi), \quad (6)$$

$$E_y = |\hat{E}_y| \cos(kz - \omega t + \phi + \delta) \quad (7)$$

und der relativen Phase  $\delta$ .

Untersuchen Sie die folgenden beiden Fälle an einem fixierten Raumpunkt:

- $\delta \in \{-\pi, 0, \pi\}$ ,
- $\delta \in \{-\pi/2, \pi/2\}$ ,  $|\hat{E}_x| = |\hat{E}_y|$ ,

indem Sie

- die Polarisationsrichtungen beschreiben.  
Was erwarten Sie im zweiten Fall für  $|\hat{E}_x| \neq |\hat{E}_y|$ ?
- die assoziierten Magnetfelder berechnen.