Vorlesung zur Quantenfeldtheorie — SoSe 2019
9. Übungsblatt

Prof. Dr. Gudrun Hiller

Ausgabe: Donnerstag, den 06.05.2019
Abgabe: Dienstag, den 11.06.2019, 11 Uhr

Übungsleiter: Rigo Bause und Kevin Moch

Aufgabe 1: Pauli-Villars-Regulator — 4 Punkte

Der Pauli-Villars Regulator ist definiert durch:

$$\frac{1}{(l^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon)^n} \to \frac{1}{(l^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon)^n} - \frac{1}{(l^2-\Lambda^2+\mathrm{i}\varepsilon)^n} \tag{1}$$

mit der Hilfsfeld-Masse $\Lambda \gg m$. Berechnen Sie die Integrale

$$P_n = \int \mathrm{d}^4 l_\mathrm{E}\, \frac{1}{\left(l_\mathrm{E}^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon\right)^n} \quad , \quad n \in \{1,2\} \quad , \tag{2}$$

wobei $\mathrm{d}^4 l_\mathrm{E}$ die euklidische Metrik ist, einmal mit dem Pauli-Villars Regulator (1) als auch mit dem Cut-Off Regulator:

$$\int \to \int^\Lambda \quad . \tag{3}$$

Aufgabe 2: *Divergente Integrale* — 4 Punkte

Welches Verhalten zeigen folgende Integrale im Ultraviolett(UV) Bereich des Schleifenimpulses?

$$I_1 = \int \mathrm{d}^4 k\, \frac{1}{\left[(k-z)^2-R^2+\mathrm{i}\varepsilon\right]^2} \tag{4}$$

$$I_2 = \int \mathrm{d}^4 k\, \frac{1}{[k^2-R^2+\mathrm{i}\varepsilon]^2} \tag{5}$$

Wie verhält sich die Differenz $I_1 - I_2$ in diesem Grenzfall? Diskutieren Sie ebenfalls das Verhalten von I_1 in $D=3$ und $D=5$ Dimensionen[1]

[1] Es handelt sich dabei um eine zeitliche und $D-1$ räumliche Dimensionen. Die Fortsetzung der Dimension ist ein mathematischer Trick zur Regularisierung von divergenten Ausdrücken und hat hier nichts mit physikalischen Extradimensionen zu tun.

Aufgabe 3: *Integration-By-Parts* Identitäten **7 Punkte**

Diese Aufgabe ist eine Einführung in die Methode der *Integration-By-Parts* (IBP) Identitäten zur Berechnung von Feynman-Integralen[2].
Betrachten Sie dazu die Klasse ($n \in \mathbb{N}$) der *massiven* euklidischen D-dimensionalen skalaren 1-Loop Vakuumintegrale:

$$I(n) = \int \left[\mathrm{d}^D k\right] \frac{1}{\left(k^2 + m^2\right)^n} \tag{6}$$

mit dem Integrationsmaß $\left[\mathrm{d}^D k\right] = \mathrm{d}k_1 \cdots \mathrm{d}k_D / \, (2\pi)^{D/2}$.

a) Bestimmen Sie die IBP Identitäten, d.h. die lineare Rekursionsrelation

$$(D - 2n)\, I(n) + 2nm^2 I(n+1) = 0 \tag{7}$$

via Differentiation $\left(\partial_{k_\mu}\right)$ des Integranden $k_\nu / \left(k^2 + m^2\right)^n$.

b) Lösen Sie die Differentialgleichung (7). Bestimmen Sie die Massen-Dimension, d.h. die Abhängigkeit des Parameters m.

[2] K. G. Chetyrkin and F. V. Tkachov, Nucl. Phys. B **192** (1981) 159.