9. Übungsblatt zur Vorlesung **SS 2017**
Theoretische Physik II **Prof. G. Hiller**
Abgabe: bis Donnerstag, den 15. Juni 2017 14:00 Uhr

Aufgabe 1: Spaß mit Spins **(4 Punkte)**

Die Komponenten des Drehimpulsoperators $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)^{\mathrm{T}}$ erfüllen die Drehimpulsalgebra $[J_k, J_l] = \sum_m \mathrm{i}\hbar\epsilon_{klm}J_m$. Sei $|j,m\rangle$ Eigenzustand von $J^2 = \vec{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^3$ und J_z mit

$$J^2|j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j,m\rangle, \qquad J_z|j,m\rangle = \hbar m, \tag{1}$$

wobei aus der Vorlesung bekannt ist, dass m die $2j+1$ Werte aus $\{-j, -j+1, ..., j-1, j\}$ annehmen kann.

In dieser Aufgabe ist es hilfreich, die Ergebnisse von Blatt 4, Aufgabe 2 zu verwenden.

(a) Begründen Sie, warum mit den Pauli-Matrizen Spin-1/2 Systeme beschrieben werden können, und geben Sie die entsprechenden Drehimpulsoperatoren mit Hilfe der Pauli-Matrizen an.

(b) Sei nun der Spin-Zustand $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^{\mathrm{T}}$ gegeben. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten, einen Spin in x-Richtung bzw. in $-x$-Richtung zu messen? Welche Wahrscheinlichkeiten ergeben sich für die y- und $-y$-Richtungen?

(c) Bestimmen Sie nun den erwarteten Wert $E(Y)$ für die Spinmessung entlang der y-Achse am Spin-Zustand ϕ aus (b) auf zwei Weisen:

1) Mit Hilfe der aus der Statistik bekannten Formel $E(Y) = y_+ p(y_+) + y_- p(y_-)$, wobei $y_\pm$ die beiden möglichen Messergebnisse der y-Spinmessung sind und $p(y_\pm)$ die Wahrscheinlichkeit angibt, das Messergebnis $y_\pm$ zu erhalten (verwenden Sie die Ergebnisse aus (b)),

2) Mit Hilfe der aus der Quantenmechanik bekannten Formel $E(Y) = \langle\phi|J_y|\phi\rangle$.

Aufgabe 2: Spin-3/2 Teilchen **(6 Punkte)**

In dieser Aufgabe sollen die Drehimpulsoperatoren für festen Spin $j = 3/2$ als Matrizen S_x, S_y und S_z dargestellt werden, sodass S_z diagonal ist. Hierfür werden die Auf-und Absteigeoperatoren $J_\pm = J_x \pm J_y$ verwendet, welche wie folgt auf die Eigenzustände $|j,m\rangle$ aus (1) wirken:

$$J_\pm|j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}|j, m\pm 1\rangle. \tag{2}$$

(a) Überlegen Sie sich, wie viele Eigenvektoren zu welchen Eigenwerten von S_z existieren und ordnen sie diese so an, dass bezüglich dieser Eigenvektoren von oben nach unten kleiner werdende Eigenwerte auf der diagonalen von S_z stehen.

(b) Nutzen Sie die Wirkung der Auf- und Absteigeoperatoren in Formel (2), um diese Operatoren als Matrizen $S_\pm$ bezüglich der Eigenvektoren von S_z zu schreiben.

(c) Berechnen Sie nun die Matrizen S_x und S_y mit Hilfe der in (b) berechneten Matrix $S_\pm$.

Aufgabe 3: Drehimpuls und Laplaceoperator **(7 Punkte)**
Im Dreidimensionalen kann das Quadrat des Impulsoperators in einen radialen und einen Winkelanteil zerlegt werden:

$$-\hbar^2\Delta = \hat{p}^2 = \hat{p}_r^2 + \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^2}, \tag{3}$$

wobei $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial_z^2}$ der Laplaceoperator und $\hat{L} = \hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}$ der (vektorielle) Drehimpulsoperator ist. In dieser Aufgabe ist es vorteilhaft, mit den Basisvektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\phi$ zu rechnen.

(a) Bestimmen Sie den Drehimpulsoperator in Kugelkoordinaten.

(b) Berechnen Sie $\hat{L}^2$.

(c) Schreiben Sie den Laplaceoperator in Kugelkoordinaten und identifizieren Sie anschließend die Anteile des Laplaceoperators, denen $\hat{L}^2$ und $\hat{p}_r^2$ entsprechen.

Aufgabe 4: Kugelflächenfunktionen **(3 Punkte)**
Die Kugelflächenfunktionen $Y_{lm} = Y_{lm}(\theta,\phi)$, $l \in \mathbb{N}_0$, $m = 0, \pm 1, ..., \pm l$ erfüllen die Differentialgleichung

$$\left(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + l(l+1)\right)Y_{lm}(\theta,\phi) = 0 \tag{4}$$

und sind definiert als

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos(\theta))\exp(\mathrm{i}m\phi), \tag{5}$$

wobei

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l\, l!}\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}\left(x^2-1\right)^l \tag{6}$$

die zugeordneten Legendre-Polynome sind.
Geben Sie explizit $Y_{00}(\theta,\phi)$, $Y_{10}(\theta,\phi)$ und $Y_{11}(\theta,\phi)$ an, und zeigen Sie, dass diese Gleichung (4) erfüllen.

Webseite zur Vorlesung:
http://people.het.physik.tu-dortmund.de/~ghiller/TH2-SS2017.html