Vorlesung zur Quantenfeldtheorie — SoSe 2019
8. Übungsblatt

Prof. Dr. Gudrun Hiller

Ausgabe: Mittwoch, den 29.05.2019
Abgabe: Dienstag, den 04.06.2019, 11 Uhr

Übungsleiter: Rigo Bause und Kevin Moch

Aufgabe 1: Die φ^4-Theorie — 7 Punkte

Betrachten Sie ein reelles skalares Feld mit $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$, wobei

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\big(\partial^\mu\varphi\big)\big(\partial_\mu\varphi\big) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2, \tag{1}$$

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4!}Z_\lambda\lambda\varphi^4 + \mathcal{L}_{\text{ct}}, \tag{2}$$

$$\mathcal{L}_{\text{ct}} = \frac{1}{2}(Z_\phi - 1)\big(\partial^\mu\varphi\big)\big(\partial_\mu\varphi\big) - \frac{1}{2}\big(Z_m - 1\big)m^2\varphi^2. \tag{3}$$

a) Zeichnen Sie Feynmandiagramme für die Vertizes und geben Sie die zugehörigen Feynmanregeln an.

b) Setzen Sie $Z_{\varphi,m,\lambda} = 1$, zeichnen Sie alle Diagramme mit $1 \leq E \leq 4$ und $0 \leq V \leq 2$, wobei E die Anzahl der externen Linien und V die Anzahl der Vertizes sei.
Ist ein Diagramm invariant unter Vertauschung innerer Linien, so muss bei der Rechnung zusätzlich noch durch die Anzahl der Permutationen solcher Linien, dem sogenannten Symmetriefaktor, geteilt werden. Geben Sie für die gezeichneten Diagramme ebenfalls die Symmetriefaktoren an.

c) Erklären Sie, warum es keinen in φ linearen Counter-Term (wie in der φ^3-Theorie) gibt.

Aufgabe 2: Asymptotisch freie Felder — 7 Punkte

a) Betrachten Sie den Feynman-Propagator

$$\Delta_F(z) = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}k_0}{2\pi}\frac{1}{k_0^2 - \vec{k}^2 - m^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0x_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\vec{z}} \tag{4}$$

und lösen Sie die innere Integration mittels Residuensatz, sowie die äußere Integration über sphärische Koordinaten, um den Propagator auf die Form

$$\Delta_F(z) = \frac{\mathrm{i}}{4\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}k\frac{k^2}{\sqrt{k^2+m^2}}\frac{\sin(kz)}{kz}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{k^2+m^2}z_0} \tag{5}$$

zu bringen.

b) Betrachten Sie nun raumartige Abstände $z_0^2 - \vec{z}^2$ im Limes $|\vec{z}| \to \infty$ und beschreiben Sie das asymptotische Verhalten des Propagators durch die modifizierte Besselfunktion zweiter Art $K_1(x)$.
Bestimmen Sie anschließend das asymptotische Verhalten

$$K_1(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{e}^{-x} \tag{6}$$

über eine Sattelpunktsapproximation der Darstellung

$$K_1(x) = \int_0^\infty \mathrm{d}k\mathrm{e}^{-x\cosh(k)}\cosh(k). \tag{7}$$

Entwickeln Sie dazu um den Sattelpunkt des Exponenten.

c) Interpretieren Sie das Resultat in Hinblick auf zwei untereinander wechselwirkende Felder.

Aufgabe 3: Feynman Parametrisierung — 6 Punkte

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass folgende Gleichung gilt:

$$\frac{1}{A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n} = \int_0^1 \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n \delta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\right) \frac{(n-1)!}{[x_1 A_1 + x_2 A_x + ... + x_n A_n]^n}. \tag{8}$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Zeigen Sie die Beziehung (8) explizit für $n = 1, 2$.

b) Zeigen Sie per Induktion das folgende Lemma:

$$\frac{1}{A(B)^n} = \int \mathrm{d}u \int \mathrm{d}\alpha \delta(u + \alpha - 1) \frac{n\alpha^{n-1}}{(uA + \alpha B)^{n+1}}. \tag{9}$$

c) Zeigen Sie nun (8) per Induktion unter Verwendung des Lemmas (9).

Hinweise:

- Verwenden Sie die Eigenschaft $\delta(f(x)/\alpha) = |\alpha|\delta(f(x))$.
- Verwenden Sie die Substitution $x_i = (1 - n)u_i$