8. Übungsblatt zur Vorlesung **SS 2017**
Theoretische Physik II **Prof. G. Hiller**
Abgabe: bis Donnerstag, den 8. Juni 2017 14:00 Uhr

Aufgabe 1: Heisenberg- und Schrödingerbild **(5 Punkte)**
Zeigen Sie, dass folgende Aussage korrekt ist:

„Das Schrödinger- und Heisenbergbild sind physikalisch äquivalent, weil sie dieselben Erwartungswerte liefern."

Hierzu wird der Zeitentwicklungsoperator benötigt. Benutzen Sie für Ihren Beweis die Dirac-Schreibweise.

Aufgabe 2: Bahndrehimpulsoperator **(5 Punkte)**
Der quantenmechanische Bahndrehimpuls hat die folgende Form:

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}} \tag{1}$$

(a) Beweisen Sie die folgende Kommutatorrelation für die Komponenten des Bahndrehimpulses:

$$\left[\hat{\boldsymbol{L}}_i, \hat{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{j}}\right] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{k}}, \quad \text{mit } i,j,k = x,y,z \tag{2}$$

(b) Berechnen Sie den Kommutator $\left[\hat{\boldsymbol{p}}_i, \hat{\boldsymbol{L}}_l\right]$. Welche Schlüsse können Sie daraus über die gleichzeitige Messbarkeit der beiden Größen ziehen?

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Relation (2), dass für alle $i = x,y,z$ gilt

$$\left[\hat{\boldsymbol{L}}_i, \vec{\boldsymbol{L}}^2\right] = 0. \tag{3}$$

(d) In der klassischen Mechanik gilt $\vec{\boldsymbol{L}}^2 = (\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{p}})^2 = \vec{\boldsymbol{r}}^2\vec{\boldsymbol{p}}^2 - (\vec{\boldsymbol{r}}\vec{\boldsymbol{p}})^2$. Was ändert sich bei einer quantenmechanischen Betrachtung? Berechnen Sie hierzu $\vec{\boldsymbol{L}}^2$ quantenmechanisch.

Aufgabe 3: Drehimpulsoperator in Polarkoordinaten **(5 Punkte)**
Ziel dieser Aufgabe ist es die Proportionalität zwischen dem Drehimpulsoperator $\hat{\boldsymbol{L}}_z = \hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{p}}_y - \hat{\boldsymbol{y}}\hat{\boldsymbol{p}}_x$ und der Ableitung nach dem Winkel ϕ zu zeigen und den zugehörigen Proportionalitätsfaktor zu bestimmen. Zwischen kartesichen und Polarkoordinaten gilt der Zusammenhang

$$x = r\cos(\phi) \quad \text{und} \quad y = r\sin(\phi)., \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{4}$$

(a) Stellen Sie die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial y}$ in Polarkoordinaten, das heißt in Abhängigkeit von $\frac{\partial}{\partial r}$ und $\frac{\partial}{\partial \phi}$, dar. Hilfreich ist hierfür die Kettenregel.

(b) Wie lautet der Drehimpulsoperator $\hat{\boldsymbol{L}}_z$ in Polarkoordinaten?

(c) Für welchen Wert von α ist die Beziehung $\hat{\boldsymbol{L}}_Z\Psi = \alpha\frac{\partial}{\partial\phi}\Psi$ erfüllt?

Aufgabe 4: Translation in der Quantenmechanik: $f(x) \to f(x+a)$ **(5 Punkte)**

Gegeben sei eine auf $\mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbare Funktion $f(x)$. Auf diese Funktion wirkt eine Operatorfunktion $g(\hat{\boldsymbol{O}})$. Eine Operatorfunktion $g(\hat{\boldsymbol{O}})$ ist immer über ihre Taylorreihe definiert. Wenn wir die Entwicklung der Funktion $g(x)$ um $x = 0$ kennen d.h. alle Koeffizienten der Taylorreihe g_n mit $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n$, dann ist die zugehörige Operatorfunktion über die Reihe

$$g(\hat{\boldsymbol{O}}) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \hat{\boldsymbol{O}}^n \tag{5}$$

mit eben diesen Koeffizienten g_n eindeutig definiert.

(a) Geben Sie die Taylorreihe der Funktion $f(x+a)$ um x an.

(b) Sei nun die Operatorfunktion $g_a(\hat{\boldsymbol{O}}) = \exp\left(ia\hat{\boldsymbol{O}}\right)$. Geben Sie für diese Funktion die Koeffizienten g_n der Taylorreihe an.

(c) In der klassischen Mechanik haben Sie gelernt, dass der Impuls der Generator einer Translation der generalisierten Koordinaten ist. Wir postulieren jetzt, dass der Impulsgenerator in der Quantenmechanik ebenfalls der Generator einer Translation ist. Wir suchen daher die explizite Form des Impulsoperators. Verwenden Sie die Ergebnisse aus (a) und (b) und bestimmen Sie durch Koeffizientenvergleich der Definitionsgleichung einer Translation

$$\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar} a \hat{\boldsymbol{p}}} f(x) = f(x+a) \tag{6}$$

die explizite Form des Impulsoperators $\hat{\boldsymbol{p}}$. Wie würde dieser in drei Dimensionen aussehen?

(d) Warum muss man dabei im Exponenten durch $\hbar$ teilen? Machen Sie hierzu eine Dimensionsanalyse.

Webseite zur Vorlesung:

`http://people.het.physik.tu-dortmund.de/~ghiller/TH2-SS2017.html`