Vorlesung zur Quantenfeldtheorie SoSe 2019
7. Übungsblatt

Prof. Dr. Gudrun Hiller

Ausgabe: Donnerstag, den 23.05.2019
Abgabe: Dienstag, den 28.05.2019, 11 Uhr

Übungsleiter: Rigo Bause und Kevin Moch

Aufgabe 1: Gekoppelte Skalarfelder — 5 Punkte

Betrachten Sie ein komplexes Skalarfeld φ, das mit einem reellen Skalarfeld χ über den Term $\mathcal{L}_1 = g\chi\varphi^\dagger\varphi$ wechselwirkt. Zeichnen Sie das Feynmandiagramm des Wechselwirkungsterms. Verwenden Sie eine gerade Linie für den φ-Propagator und eine gestrichelte Linie für den χ-Propagator. Machen Sie sich klar, dass der φ-Propagator eine bestimmte Richtung hat, und kennzeichnen Sie diese durch entsprechende Pfeile. Geben Sie den dazugehörigen Vertexfaktor an.

Aufgabe 2: Feldredefinitionen — 7 Punkte

Die Streuamplitude eines beliebigen Prozesses sollte durch Feldredefinitionen unverändert bleiben. Betrachten Sie als Beispiel die freie, nicht-wechselwirkende Theorie

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi\right) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2. \tag{1}$$

Führen Sie hierin die Feldredefinition $\varphi = \tilde{\varphi} + \lambda\tilde{\varphi}^2$ durch. Geben Sie die Lagrangedichte nach der Feldredefinition, sowie die dazugehörigen Feynmanregeln im Impulsraum an.
Berechnen Sie auf Baumgraphenniveau alle Diagramme der Streuamplitude $\tilde{\varphi}\tilde{\varphi} \to \tilde{\varphi}\tilde{\varphi}$ und zeigen Sie, dass die Gesamtamplitude verschwindet. Somit handelt es sich also auch nach Feldredefinition um eine freie Theorie.
Hinweis: Auf Schleifen-Niveau muss beachtet werden, dass sich das Integrationsmaß $\mathcal{D}_\varphi$ nicht-trivial transformiert. Für Baumgraphen-Amlituden kann dies ignoriert werden, weswegen Sie in dieser Aufgabe die neuen Feynmanregeln bezüglich des Feldes $\tilde{\varphi}$ direkt aus der transformierten Lagrangedichte ablesen können.

Aufgabe 3: Erste Propagatorkorrektur in der φ^3-Theorie — 8 Punkte

Betrachten Sie die φ^3-Theorie (ohne Counterterme) mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\partial^\mu\varphi\right)\left(\partial_\mu\varphi\right) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2}_{=\mathcal{L}_0} + \underbrace{\frac{1}{6}g\varphi^3}_{=\mathcal{L}_1}. \tag{2}$$

Das Funktionalintegral der freien Theorie berechnet sich zu

$$Z_0[J] = \exp\left[-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4x' J(x)\Delta(x-x')J(x')\right] \tag{3}$$

mit dem freien Propagator Δ.
Zeigen Sie explizit durch Verwendung von Funktionalableitungen, dass der volle Propagator

$$\langle 0|\mathrm{T}[\varphi(x_1)\varphi(x_2)]|0\rangle \tag{4}$$

in der wechselwirkenden Theorie bis einschließlich zur Ordnung $\mathcal{O}(g)$ dem freien Propagator entspricht.
Begründen Sie mit Hilfe von Feynmandiagrammen, dass eine Korrektur zum freien Propagator erst ab der Ordnung $\mathcal{O}(g^2)$ zu erwarten ist.
Hinweis: Lassen Sie in der Rechnung den Ausdruck $\Delta(0)$ stehen und ignorieren Sie, dass dieser eigentlich divergent ist.