7. Übungsblatt zur Vorlesung **SS 2017**
Theoretische Physik II **Prof. G. Hiller**
Abgabe: bis Donnerstag, den 1. Juni 2017 14:00 Uhr

Aufgabe 1: Dirac-Schreibweise zum Anfassen **(5 Punkte)**
In dieser Aufgabe geht es darum, ein bisschen vertrauter mit der Dirac-Schreibweise und deren Anwendung zu werden.

(a) Zeigen Sie in Dirac-Schreibweise, dass die Eigenwerte eines hermiteschen Operators reell sind. Zeigen Sie zudem, dass die Eigenzustände eines hermiteschen Operators orthogonal sind.

(b) Gegeben sei der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wählen Sie β so, dass $\hat{H}$ hermitesch ist und bestimmen Sie die Eigenwerte ϵ_i und die dazugehörigen Eigenvektoren $|i\rangle$.

(c) Die Eigenvektoren $|i\rangle$ bilden eine vollständige Orthonormal-Basis.
Zeigen Sie explizit, dass $\sum_{i=1}^{3} |i\rangle \langle i| = \mathbb{1}$.

(d) Zeigen Sie außerdem explizit, dass $\langle j|i\rangle = \delta_{ij}$.

(e) Der Anfangszustand sei

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{43}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Drücken Sie $|\Psi\rangle$ in Spektraldarstellung aus, d.h. $|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{3} |i\rangle (\langle i|\Psi\rangle)$.

Aufgabe 2: Matrix-Darstellung von Operatoren **(5 Punkte)**
Sei H ein Hilbertraum und $\{|\text{n}\rangle_\text{n}\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem (ONS), dann kann ein Zustand $|\Phi\rangle$ als Vektor mit unendlich vielen Zeilen aufgefasst werden:

$$|\Phi\rangle = (c_1, c_2, ...)^T = c_1 |1\rangle + c_2 |2\rangle + ... \tag{2}$$

Analog können lineare Operatoren als $(\infty \times \infty)$-Matrix dargestellt werden.

(a) Geben Sie die Matrixdarstellung von $\hat{\boldsymbol{a}}, \hat{\boldsymbol{a}}^\dagger, \hat{\boldsymbol{p}}$ und $\hat{\boldsymbol{x}}$ bezüglich des ONS der Eigenzustände des harmonischen Oszillators an. Berechnen Sie dazu unter anderem die Matrixelemente $\langle \text{n}|\hat{\boldsymbol{a}}|\text{m}\rangle$ für beliebige n, m.

(b) Berechnen Sie durch Matrixmultiplikation $[\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{p}}]$ und $\hat{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{2}(m\omega^2 \hat{\mathbf{x}}^2 + \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{m})$.

Aufgabe 3: Der Tunneleffekt **(5 Punkte)**

Betrachten Sie das folgende Potential für den Fall $E < V_0$ einer von links einlaufenden Wahrscheinlichkeitswelle:

$$V(x) = V_0\,\Theta(a - |x|) \tag{3}$$

(a) Skizzieren Sie das Potential und markieren Sie die drei relevanten Bereiche I, II, III.

(b) Geben Sie die allgemeine Lösung der stationären Schrödingergleichung für die Bereiche I, II und III an und skizzieren Sie den Verlauf der Wellenfunktion. Welchen Koeffizienten können Sie auf Grund der Tatsache, dass die Welle von links einläuft, sofort ausschließen?

(c) Nutzen Sie nun die Stetigkeitsforderung, um die Transmissionsamplitude, d.h. das Verhältnis aus den Koeffizienten der transmittierten und der einlaufenden Welle, auszurechnen.

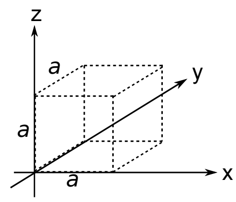
(d) Geben Sie das Quadrat der Transmissionsamplitude an. Nähern Sie diese für den Fall einer sehr hohen und breiten Barriere, d.h. $\kappa a >> 1$ mit $\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$.

(e) Interpretieren Sie die Bedeutung des Quadrats der Transmissionsamplitude insbesondere im Hinblick auf die gleiche Situation in der klassischen Mechanik.

Aufgabe 4: Teilchen in einem dreidimensionalen Potentialtopf **(5 Punkte)**

Betrachten Sie den unendlich hohen kubischen Potentialtopf

$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x, y, z \text{ alle zwischen 0 und } a \text{ liegen} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \tag{4}$$



(a) Bestimmen Sie die stationären Zustände und die entsprechenden Energien. Nutzen Sie zum Lösen der stationären Schrödingergleichung das Verfahren der Variablenseparation in kartesischen Koordinaten.

(b) Bezeichnen Sie die verschiedenen Energien in aufsteigender Reigenfolge mit $E_1, E_2, E_3, \ldots$ Bestimmen Sie E_1 bis E_6. Geben Sie auch Entartung der einzelnen Energiewerte an (d.h. die Anzahl von verschiedenen Zuständen mit der selben Energie). Gibt es auch beim eindimensionalen unendlichen Potentialtopf Entartungen?

(c) Wie verändern sich die Energien, wenn die Ausdehnung a vergrößert wird?

(d) Erklären sie qualitativ, wie die Energien der gebundenen Zustände sich für einen Potentialtopf mit endlichem Potential V_0 verhalten. Überlegen Sie dazu, wie sich die Wellenfunktionen verändern, wenn man die Höhe von V_0 (bei gleichbleibender Ausdehnung a) verringert, und was dies für die Energie bedeutet.

Webseite zur Vorlesung:
`http://people.het.physik.tu-dortmund.de/~ghiller/TH2-SS2017.html`