7. Übungsblatt zur Vorlesung **WS 2015/2016**
Theoretische Physik I **Prof. G. Hiller**
Abgabe: bis Dienstag, den 8. Dezember 2015 16:00 Uhr

Aufgabe 1: Greensche Funktionen **(5 Punkte)**
Einem linearen Differentialoperator D kann im n-Dimensionalen eine Greensche Funktion G wie folgt zugeordnet werden:

$$DG(\vec{x}) = \delta^{(n)}(\vec{x})\,. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass Sie eine partikuläre Lösung $f_p(\vec{x})$ der Differentialgleichung

$$Df(\vec{x}) = J(\vec{x}) \tag{2}$$

mit beliebiger Inhomogenität $J(\vec{x})$ durch Faltung der Inhomogenität mit der Greenschen Funktion konstruieren können:

$$f_p(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} J(\vec{x}')G(\vec{x}-\vec{x}')\mathrm{d}^n x'\,, \tag{3}$$

d.h. dass $f_p(\vec{x})$ die Gleichung (2) erfüllt.

(b) Sei $n = 1$. Was ist eine Greensche Funktion des Differentialoperators $D = \partial/\partial x$?
Hinweis: Eine Rechnung ist nicht nötig. Versuchen Sie stattdessen, sich an vergangene Übungszettel zu erinnern.

(c) Eine Greensche Funktion des harmonischen Oszillators ($n = 1$)

$$D = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \tag{4}$$

ist:

$$G(x) = \frac{\sin(kx)}{k}\theta(x) \tag{5}$$

mit der Heaviside-Funktion $\theta(x)$. Berechnen Sie eine partikuläre Lösung $f_p(x)$ zur Inhomogenität $J(x) = j_0\theta(x)$ mit $j_0 = \text{const}$. Beachten Sie bei der Berechnung den Unterschied der Fälle $x \geq 0$ und $x < 0$.

In der nächsten Aufgabe lernen Sie eine systematische Methode, Greensche Funktionen zu bestimmen.

Aufgabe 2: Eine weitere Darstellung der Delta-Distribution **(5 Punkte)**
Zeigen Sie, dass das Potential

$$G(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}|} \tag{6}$$

eine Greensche Funktion des Laplace-Operators $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ist, d.h.

$$\Delta G(\vec{x}) = \delta^{(3)}(\vec{x}) \tag{7}$$

erfüllt.
Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Schreiben Sie $G(\vec{x})$ und $\delta^{(3)}(\vec{x})$ als inverse Fouriertransformierte ihrer Fouriertransformierten $\mathscr{F}[G(\vec{x})](\vec{k})$ und $\mathscr{F}[\delta^{(3)}(\vec{x})](\vec{k})$, also

$$G(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{F}[G(\vec{x})](\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} \mathrm{d}^3 k \tag{8}$$

und analog für die Delta-Distribution. Stellen Sie hiermit Gleichung (7) im k-Raum dar.

(b) Lösen Sie die so erhaltene algebraische Gleichung nach $\mathscr{F}[G(\vec{x})](\vec{k})$ auf.

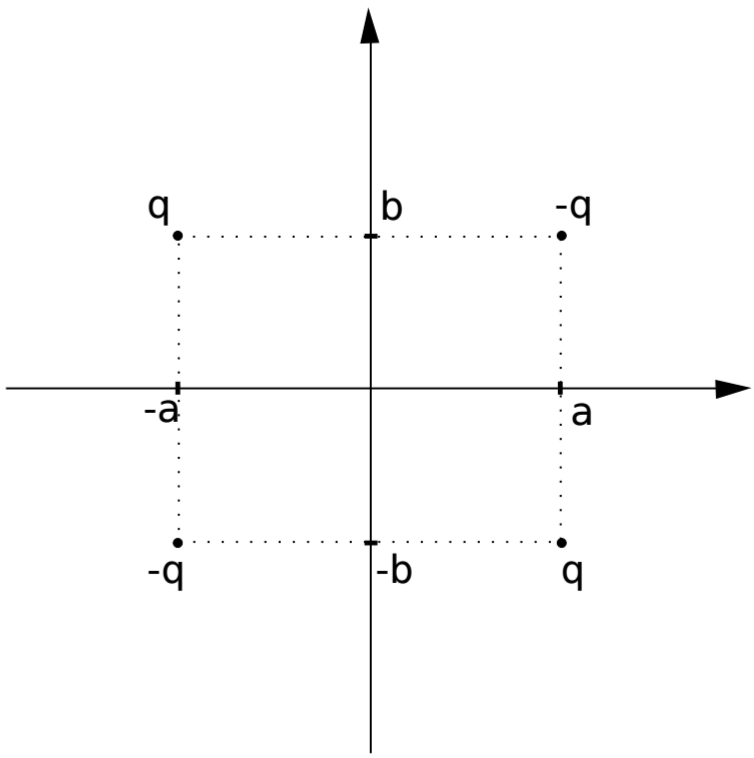
(c) Bestimmen Sie $G(\vec{x})$, indem Sie Gleichung (8) explizit berechnen. Nutzen Sie dafür die Beziehung

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\vec{k}|^2} e^{i\vec{k}\vec{x}} \mathrm{d}^3 k = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|\vec{x}|} \tag{9}$$

aus.

Aufgabe 3: Multipolentwicklung **(5 Punkte)**

Gegeben sei die folgende Ladungsverteilung:



Berechnen Sie die Multipolentwicklung dieser Ladungsverteilung bis zur ersten nichtverschwindenden Ordnung. Dazu werden die Ladung, das Dipolmoment und das Quadrupolmoment benötigt.

Tipp: Die Multipolenwicklung eines Potentials beginnt wie folgt:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{r^3} \vec{e}_r{}^T \hat{Q} \vec{e}_r + \dots \right]. \tag{10}$$

Für eine diskrete Ladungsverteilung beschreibt

$$Q = \sum_i q_i \tag{11}$$

die Gesamtladung,

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i \tag{12}$$

das Dipolmoment und

$$\hat{Q}_{k,l} = \sum_i q_i \left(3(\vec{r}_i)_k (\vec{r}_i)_l - (\vec{r}_i)^2 \delta_{k,l}\right) \tag{13}$$

das Quadrupolmoment. Der Vektor $\vec{r}_i$ ist der Ort der i-ten Ladung q_i und der Einheitsvektor in Richtung des Aufpunktes $\vec{r}$ wird $\vec{e}_r$ genannt.

Aufgabe 4: Greensche Identitäten **(5 Punkte)**

Seien $\phi(\vec{x})$ und $\psi(\vec{x})$ je zwei mal differenzierbare Felder.

(a) Beweisen Sie die erste Greensche Identität

$$\int\limits_V \left(\phi \Delta \psi + (\vec{\nabla}\phi) \cdot (\vec{\nabla}\psi)\right) \mathrm{d}^3 x = \int\limits_{\partial V} \phi \vec{\nabla}\psi \cdot \mathrm{d}\vec{A} \tag{14}$$

mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes, indem Sie den linken Integranden als Divergenz eines Vektorfeldes schreiben.

(b) Beweisen Sie die zweite Greensche Identität (Greenscher Satz)

$$\int\limits_V \left(\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi\right) \mathrm{d}^3 x = \int\limits_{\partial V} \left(\phi \vec{\nabla}\psi - \psi \vec{\nabla}\phi\right) \cdot \mathrm{d}\vec{A} \tag{15}$$

mit Hilfe der ersten Greenschen Identität.