Vorlesung zur Quantenfeldtheorie — SoSe 2019

6. Übungsblatt

Prof. Dr. Gudrun Hiller

Ausgabe: Donnerstag, den 16.05.2019
Abgabe: Dienstag, den 21.05.2019, 11 Uhr — Übungsleiter: Rigo Bause und Kevin Moch

---

Aufgabe 1: Wick-Theorem — 8 Punkte

Betrachten Sie ein freies, reelles skalares Feld mit

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial^\mu \varphi\, \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \quad . \tag{1}$$

Bestätigen Sie für die $2n$-Punkt Funktion das Wick-Theorem

$$\langle 0 | \mathrm{T}\big(\varphi(x_1)...\varphi(x_{2n})\big) | 0 \rangle = \Delta(x_1 - x_2)\Delta(x_3 - x_4)...\Delta(x_{2n-1} - x_{2n}) + \text{alle anderen Paarungen} \tag{2}$$

für den Fall $n = 2$. Δ ist dabei der Propagator. Was gilt für die 3-Punkt Funktion?

Aufgabe 2: Zustandssumme eines harmonischen Oszillators — 4 Punkte

Die Zustandssumme eines einfachen harmonischen Oszillators $V(q) = \frac{m\omega^2}{2} q^2$ ist gegeben durch (H bezeichnet den Hamiltonoperator):

$$Z = \mathrm{Tr}\Big(\exp\left(-\beta\, H\right) \Big) = \sum_n \exp\left\{ -\beta \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega \right\} = \left(2 \sinh\left(\frac{\omega\, \beta}{2} \right) \right)^{-1} \quad . \tag{3}$$

Zeigen Sie dieses Resultat mithilfe des Pfadintegrals.
Hinweis: Verwenden Sie $Z \propto \det A^{-\frac{1}{2}}$ mit A dem entsprechenden Operator des einfachen harmonischen Oszillators.

Aufgabe 3: Bewegungsgleichung der φ^4-Theorie — 3 Punkte

Betrachten Sie die φ^4-Theorie eines reellen skalaren Feldes φ mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\big(\partial^\mu \varphi\big)\big(\partial_\mu \varphi\big) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{1}{4!}\lambda \varphi^4 \quad . \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass das Feld im Heisenbergbild folgender Bewegungsgleichung genügt:

$$\big(\partial^\mu \partial_\mu + m^2\big)\varphi = -\frac{\lambda}{3!}\varphi^3 \quad . \tag{5}$$