**6. Übungsblatt zur Vorlesung** **SS 2017**
**Theoretische Physik II** **Prof. G. Hiller**
**Abgabe: bis Freitag, den 26. Mai 2017 12:00 Uhr !!**

---

Bitte beachten Sie den geänderten Abgabetermin wegen Christi Himmelfahrt.

**Aufgabe 1: Harmonischer Oszillator Teil 2** **(3 Punkte)**

(a) Berechnen Sie $\Delta x \Delta p$, bekannt aus der Heisenbergschen Unschärferelation, für die Eigenzustände $|n\rangle$ mit Energieeigenwert $\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$ des Hamiltonoperators für den harmonischen Oszillator. Dabei ist

$$\Delta O = \langle n|\hat{O}^2|n\rangle - \langle n|\hat{O}|n\rangle^2 .$$

Hinweis: Sie können die Ergebnisse von Blatt 5 verwenden.

(b) Plotten Sie die Wellenfunktionen $\Psi_0$ und $\Psi_1$ des harmonischen Oszillators als Funktion von $x$.
Hinweis: Sie haben die Wellenfunktionen bereits auf Blatt 5 in Aufgabe 2 berechnet.

**Aufgabe 2: Orthogonale Funktionen** **(4 Punkte)**

(a) Orthonormieren Sie die Funktionen

$$w_0(x) = 1, \quad w_1(x) = x, \quad w_2(x) = x^2$$

bezüglich des Skalarproduktes auf

$$\langle v_i, w_j \rangle = \int v_i w_j dx$$

auf dem Intervall $[-1,1]$. Um die orthonomierten Funktionen $v_n(x)$ zu erhalten verwenden Sie das Gram-Schmidt Orthonormalisierungsverfahren:

$$v'_n = w_n - \sum_{i=0}^{n-1} \langle v_i, w_n \rangle \cdot v_i \quad ,$$
$$v_n = \frac{v'_n}{\| v'_n \|} \quad ,$$

wobei

$$\| v'_n \| = \sqrt{\langle v'_n, v'_n \rangle} \quad .$$

(b) Berechnen Sie aus den in a) berechneten orthonormalen Funktionen die ersten drei Legendre-Polynome

$$P_i(x) = c_i v_i(x), \quad c_i = const.$$

welche die Relation

$$P_i(1) = 1$$

erfüllen müssen.

**Aufgabe 3: Legendre-Polynome** **(7 Punkte)**

Die Legendre-Polynome lassen sich über

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2 - 1\right)^n \tag{1}$$

berechnen. Sie sind Lösungen der Legendreschen Differentialgleichungen

$$\left(1 - x^2\right) P_n'' - 2xP_n' + n(n+1) P_n = 0. \tag{2}$$

Ziel der Aufgabe ist es

$$\int_{-1}^{1} P_n P_m = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn} \tag{3}$$

zu beweisen.

- Stellen Sie die Legendre-DGL für $P_n$ auf und multiplizieren Sie diese mit $P_m$. Stellen Sie die Legendre-DGL für $P_m$ auf und multiplizieren Sie diese mit $P_n$. Bilden Sie nun die Differenz dieser beiden Gleichungen.
- Formen Sie die so entstandene Gleichung solange um, bis Sie einen Teil dieser durch

$$\frac{d}{dx} \left(\left(1 - x^2\right) \left(P_m P_n' - P_n P_m'\right)\right)$$

ersetzen können.
- Integrieren Sie Ihre Gleichung von $[-1, 1]$ und führen Sie im Anschluss eine geeignete Fallunterscheidung durch.
- Zwischenergebnis:

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 \frac{d^n}{dx^n} \left(\left(x^2 - 1\right)^n\right) \frac{d^n}{dx^n} \left(\left(x^2 - 1\right)^n\right) dx$$

- Folgende Relationen könnten hilfreich sein:

$$\int \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n$$
$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2 - 1)^n = (2n)!$$

**Aufgabe 4: Ehrenfest-Theorem** **(6 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass das Ehrenfest-Theorem für einen nicht explizit zeitabhängigen Operator $\hat{\boldsymbol{A}}$ gilt. Das Ehrenfest-Theorem (4) sag aus, wie sich der Erwartungswert eines solchen Operators zeitlich ändert.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi(t)|\hat{\boldsymbol{A}}\psi(t)\rangle = \langle\psi(t)|\frac{1}{i\hbar}[\hat{\boldsymbol{A}},\hat{\boldsymbol{H}}]\psi(t)\rangle \tag{4}$$

(b) Berechnen Sie die totale Zeitableitung des Orts- und Impulserwartungswertes in der Quantenmechanik. Nutzen Sie für den Hamiltonoperator die Darstellung $\hat{\boldsymbol{H}} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + V(x)$.
Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi(t)|\hat{\boldsymbol{x}}\psi(t)\rangle = \frac{1}{m}\langle\psi(t)|\hat{\boldsymbol{p}}\psi(t)\rangle \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi(t)|\hat{\boldsymbol{p}}\psi(t)\rangle = -\langle\psi(t)|\hat{\boldsymbol{V}}'(x)\psi(t)\rangle \tag{6}$$

(c) Vergleichen Sie Ihre bisherigen Ergebnisse mit den Gleichungen, die Sie aus der klassischen Mechanik kennen. Sind die Gleichungen identisch? Wo liegen Unterschiede (beachten sie z.B. die Linearität des Erwartungswertes)? Rechnen Sie hierzu die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für $\hat{\boldsymbol{H}}$ aus.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{7}$$

**Webseite zur Vorlesung:**
`http://people.het.physik.tu-dortmund.de/~ghiller/TH2-SS2017.html`