6. Übungsblatt zur Vorlesung **WS 2015/2016**
Theoretische Physik I **Prof. G. Hiller**
Abgabe: bis Dienstag, den 1. Dezember 2015 16:00 Uhr

Aufgabe 1: Masse in Potential (5 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einem Potential V der Form

$$V(x) = -\alpha x^2 + \beta x^4 \text{ mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha, \beta > 0\,.$$

(a) Zeichnen Sie das Potential und die möglichen Bahnen des Teilchens innerhalb des Potentials.

(b) Bestimmen Sie die Extrema des Potentials. Welche Geschwindigkeit muss das Teilchen mindestens im Potentialminimum besitzen, um das Maximum des Potentials zu überwinden?

(c) Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf und bestimmen Sie die Bewegungsgleichung.

(d) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen x. In welchem Fall ist diese Annahme gerechtfertigt?

Aufgabe 2: Legendretransformation (5 Punkte)

Für eine beliebige Funktion $f(x)$ wird eine Legendretransformation folgendermassen definiert:

$$g(\gamma) = \inf_x (f(x) - \gamma x). \tag{1}$$

Berechnen Sie die Legendretransformierten der folgenden Funktionen. Prüfen Sie ausserdem, ob Sie durch erneute Transformation von $g_1(\gamma)$ wieder die Ausgangsfunktion $f_1(x)$ erhalten.

(a) Sei $f(x)$ differenzierbar. Leiten Sie aus (1) her, dass $g\left(f'(x)\right) = f(x) - x f'(x)$ gilt.

(b) $f_1(x) = A\exp(Bx)$

(c) $f_2(x) = x^2$

(d) $f_3(x) = \exp|x|$

(e) $f_4(x) = \begin{cases} (x-2)^2 - 1 & \text{für } x \geq 1 \\ 1 - x^2 & \text{für } -1 < x < 1 \\ (x+2)^2 - 1 & \text{für } x \leq -1 \end{cases}$

Aufgabe 3: Sphärisches Pendel (5 Punkte)

Ein Massepunkt m ist am Ende einer masselosen, starren Stange aufgehängt. Die Stange kann frei um ihren Aufhängepunkt im Koordinatenursprung schwingen. Die Gravitationskraft zeigt in negativer z-Richtung. (Dieses System ist äquivalent zu einem Punkt, der sich auf einer Kugelschale bewegt.)

(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion dieses Problems auf und leiten Sie die Bewegungsgleichungen ab. Verwenden Sie für die Position des Massenpunktes die Parametrisierung:

$$\vec{r} = R \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix} \text{ mit } \theta \in [0, \pi] \text{ und } \varphi \in [0, 2\,\pi). \tag{2}$$

(b) Identifizieren Sie die zyklische Koordinate. Welche Grösse bleibt erhalten? Geben Sie eine physikalische Interpretation der Erhaltungsgrösse an.

(c) Stellen Sie die Hamilton-Funktion auf, indem Sie die generalisierten Impulse

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \tag{3}$$

einführen und die Legendre-Transformation

$$H(q, p) = \left(\sum_{k=1}^{n} p_k \, \dot{q}_k(q, p) \right) - L(q, \dot{q}(q, p)) \tag{4}$$

durchführen.

(d) Bestimmen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen. Identifizieren Sie die Erhaltungsgrösse. Wie hängt die Hamilton-Funktion von der Zeit ab? Welche weitere Erhaltungsgrösse ist damit verbunden? Welche physikalische Grösse beschreibt die Hamilton-Funktion?

(e) Erklären Sie, wie sich die Hamilton-Bewegungsgleichungen im Hinblick auf Anzahl und Ordnung von denen der Euler-Lagrange-Gleichungen unterscheiden.