5. Übungsblatt zur Vorlesung **SS 2017**
Theoretische Physik II **Prof. G. Hiller**
Abgabe: bis Donnerstag, den 18. Mai 2017 14:00 Uhr

Aufgabe 1: Der harmonische Oszillator **(15 Punkte)**

Der Hamiltonoperator eines quantenmechanischen harmonischen Oszillators ist gegeben duch:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right) \quad . \tag{1}$$

Dabei sind

$$\hat{a} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\tfrac{m\omega}{\hbar}}\,\hat{x} + i\sqrt{\tfrac{1}{m\omega\hbar}}\,\hat{p}\right), \quad \hat{a}^\dagger = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\tfrac{m\omega}{\hbar}}\,\hat{x} - i\sqrt{\tfrac{1}{m\omega\hbar}}\,\hat{p}\right) \quad \text{und} \quad \hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$$

die Ab- und Aufsteigeoperatoren sowie der Anzahloperator, wobei

$$\hat{a}\,|\Psi_n\rangle = \sqrt{n}\,|\Psi_{n-1}\rangle \quad \text{und} \quad \hat{a}^\dagger\,|\Psi_n\rangle = \sqrt{n+1}\,|\Psi_{n+1}\rangle$$

gilt.
Für die weitere Rechnung setzen Sie $\hbar = \omega = m = 1$.

(a) Zeigen Sie, dass die Umformung des Hamiltonoperators in Gleichung (1) korrekt ist.

(b) Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Kommutatorrelationen:

$$\left[\hat{x}, \hat{p}\right] = i, \quad \left[\hat{x}, \hat{a}^\dagger\right] = [\hat{a}, \hat{x}] = \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad \left[\hat{a}^\dagger, \hat{p}\right] = \left[\hat{a}, \hat{p}\right] = \tfrac{i}{\sqrt{2}}, \quad \left[\hat{N}, \hat{a}^\dagger\right] = \hat{a}^\dagger, \left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1 \quad .$$

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte des Anzahloperators. Was sind folglich die Eigenenergien des harmonischen Oszillators?

(d) Aus dem Grundzustand $|\Psi_0\rangle$ kann durch n-faches Anwenden des Aufsteigeoperators $\hat{a}^\dagger$ der Zustand $|\Psi_n\rangle$ konstruiert werden, $|\Psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}^\dagger\right)^n |\Psi_0\rangle$.
Zeigen Sie mit Hilfe der Kommutatorrelationen aus a), dass $\langle\Psi_k|\Psi_n\rangle = \delta_{kn}$ gilt, d.h. die $|\Psi_n\rangle$ ein Orthonormalsystem bilden. Dabei darf angenommen werden, dass $|\Psi_0\rangle$ normiert ist.

Hinweis: $\hat{a}\,|\Psi_0\rangle = 0$

(e) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle\Psi_n|\hat{x}|\Psi_n\rangle$ und $\langle\Psi_n|\hat{p}|\Psi_n\rangle$. Dazu ist keine lange Rechnung notwendig!

(f) Bestimmen Sie nun die Erwartungswerte $\langle\Psi_n|\hat{x}^2|\Psi_n\rangle$ und $\langle\Psi_n|\hat{p}^2|\Psi_n\rangle$. Was ist der wesentliche Unterschied zum klassischen harmonischen Oszillator?

Hinweis: Es muss in dieser Aufgabe kein einziges Integral explizit gelöst werden.

Aufgabe 2: Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators **(5 Punkte)**

In der vorherigen Aufgabe wurden die Eigenenergien des harmonischen Oszillators bestimmt. Die zugehörigen Eigenfunktionen sind

$$\psi_n = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) \mathrm{e}^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \quad . \tag{2}$$

Wobei H_n die Hermitschen Polynome darstellen. Sie werden gebildet durch

$$H_n(y) = (-1)^n \mathrm{e}^{y^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}y^n} \mathrm{e}^{-y^2} \quad . \tag{3}$$

(a) Berechnen Sie die ersten vier ($n = 0, 1, 2, 3$) Hermitschen Polynome.

(b) Geben Sie den Grundzustand ψ_0 und den ersten angeregten Zustand ψ_1 des harmonischen Oszillators an und zeigen Sie, dass die zugehörigen Wellenfunktionen normiert sind.

(c) Zeigen Sie, dass die in b) aufgestellten Wellenfunktionen orthogonal sind.

Hinweis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-ax^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}$$

Webseite zur Vorlesung:
http://people.het.physik.tu-dortmund.de/~ghiller/TH2-SS2017.html