# Vorlesung zur Quantenfeldtheorie — SoSe 2019
# 4. Übungsblatt

Prof. Dr. Gudrun Hiller

**Ausgabe:** Donnerstag, den 02.05.2019
**Abgabe:** Dienstag, den 07.05.2019, 11 Uhr — Übungsleiter: Rigo Bause und Kevin Moch

---

## Aufgabe 1: $\epsilon$-Terme am Beispiel des harmonischen Oszillators — 10 Punkte

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das Vakuum-Vakuum Matrixelement (mit einem externen Freiheitsgrad $f$) gegeben ist durch das Pfadintegral

$$\langle 0|0\rangle_f = \int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p \exp\left\{ \mathrm{i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t (p\dot{q} - (1-\mathrm{i}\epsilon)H + fq) \right\} \tag{1}$$

mit $\epsilon > 0$ infinitesimal.
Im Folgenden wird die Hamiltonfunktion des harmonischen Oszillators (mit Masse $m = 1$) betrachtet:

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2}. \tag{2}$$

Nach der $\mathcal{D}_p$ Integration erhält man

$$\langle 0|0\rangle_f \propto \int \mathcal{D}_q \exp\left\{ \mathrm{i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \left( \frac{\dot{q}^2}{2a} - a\frac{\omega^2 q^2}{2} + fq \right) \right\} \tag{3}$$

mit $a = a(\epsilon)$. Weiteres Rechnen ergibt dann

$$\langle 0|0\rangle_f = \exp\left\{ -\frac{\mathrm{i}}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\mathrm{d}t' f(t) G(t-t') f(t') \right\} \tag{4}$$

mit

$$G(t-t') = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}E}{2\pi} \frac{e^{-\mathrm{i}E(t-t')}}{\frac{E^2}{a} - a\omega^2}. \tag{5}$$

$G$ soll im Folgenden wie auf Blatt 3 Aufgabe 2 auf die Form

$$G(t-t') = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}E}{2\pi} \frac{e^{-\mathrm{i}E(t-t')}}{E^2 - \omega^2 + \mathrm{i}\tilde{\epsilon}} \tag{6}$$

mit $\tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}(\epsilon) > 0$ gebracht werden.

a) Bestimmen Sie $a$ in (3), indem Sie die $\mathcal{D}_p$ Integration durchführen. Nutzen Sie dabei ihr Wissen von Blatt 2 Aufgabe 3!

b) Vergleichen Sie die beiden Ausdrücke (5) und (6) von $G$ für kleine $\epsilon, \tilde{\epsilon}$ und drücken Sie $\tilde{\epsilon}$ durch $\epsilon$ aus. Begründen Sie, warum für $\epsilon > 0$ auch $\tilde{\epsilon} > 0$ gilt.

c) Berechnen Sie nun den Propagator $\langle 0|\mathrm{T}[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)]|0\rangle$ mit Hilfe der Funktionalableitung bzgl. $f$.

d) Begründen Sie mit Hilfe von Blatt 2, Aufgabe 2 (Residuensatz), warum $G$ die Kausalitätsforderung erfüllt. Diskutieren Sie, wie sich die Situation ändert, wenn man das Vorzeichen von $\tilde{\epsilon}$ in (6) umkehrt.

**Aufgabe 2: Der Aharonov–Bohm Effekt** **10 Punkte**

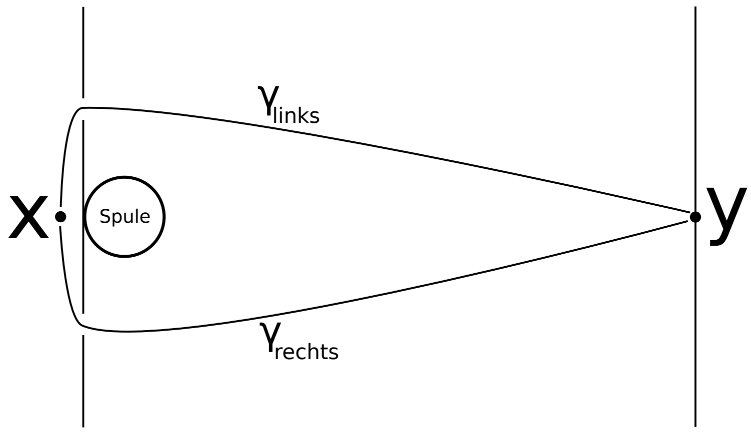
In dieser Aufgabe wird der Effekt einer langen Spule, welche sich zwischen einem Doppelspalt und einem Schirm befinde, auf ein Teilchen der Masse $m$ und Ladung $e$ untersucht, welches zum Zeitpunkt $t_1$ am Ort $\vec{x}$ lokalisiert sei. In der Abbildung ist diese Situation dargestellt. Die Spule soll sich direkt am Doppelspalt befinden und soll so liegen, dass ihre Symmetrieachse orthogonal zur Bildebene stehe.
Die Lagrangefunktion $L$ eines nichtrelativistischen Teilchens im Magnetfeld mit Vektorpotential $\vec{A}$ lautet

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + e\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}. \tag{7}$$

Die Wirkung wird in dieser Aufgabe in zwei Teile unterteilt:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t = S_0 + \int_{t_1}^{t_2} e\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}\mathrm{d}t = S_0 + \int_{\vec{x}}^{\vec{y}} e\vec{A}\mathrm{d}\vec{r} = S_0 + S_1[\gamma], \tag{8}$$

mit einem Weg $\gamma$ von $\vec{x}$ nach $\vec{y}$.




a) In welchen Bereichen existieren magnetische Felder, in welchen ist das Vektorpotential von Null verschieden?

b) Begründen Sie, warum $S_1[\gamma]$ für alle Wege $\gamma$, die auf der gleichen Seite an der Spule von $\vec{x}$ nach $\vec{y}$ laufen (ohne die Spule zu umrunden), den selben Wert hat.
Damit ergeben sich zwei Klassen von Wegen mit $S_1[\gamma_{\text{links}}] =: \alpha_1$, $S_1[\gamma_{\text{rechts}}] =: \alpha_2$

c) Berechnen Sie $\langle y, t_2 | x, t_1 \rangle$ mit Hilfe des Pfadintegrals (nehmen sie die Impulsintegration als bereits durchgeführt an), wobei nur die beiden in b) definierten Klassen an Pfaden berücksichtigt werden sollen.

d) Vergleichen Sie das Ergebnis aus c) mit dem analogen Ergebnis in Abwesenheit der Spule.

*Hinweis:* In c) und d) müssen Sie die Integrale über den freien Anteil $S_0$ nicht explizit berechnen, sondern können diese so stehen lassen.