4. Übungsblatt zur Vorlesung **SS 2017**
Theoretische Physik II **Prof. G. Hiller**
Abgabe: bis Donnerstag, den 11. Mai 2017 14:00 Uhr

Aufgabe 1: Kommutatoren **(6 Punkte)**
Der Kommutator zweier Operatoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ ist definiert durch $[\mathbf{A},\mathbf{B}] = \mathbf{AB}-\mathbf{BA}$. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) $[\mathbf{A},\mathbf{B}] = -[\mathbf{B},\mathbf{A}]$

(b) $[\mathbf{A}+\mathbf{B},\mathbf{C}] = [\mathbf{A},\mathbf{C}] + [\mathbf{B},\mathbf{C}]$

(c) $[\mathbf{A},\mathbf{BC}] = [\mathbf{A},\mathbf{B}]\mathbf{C} + \mathbf{B}[\mathbf{A},\mathbf{C}]$

(d) $[a\mathbf{A}+b\mathbf{B},\mathbf{C}] = a[\mathbf{A},\mathbf{C}] + b[\mathbf{B},\mathbf{C}]$ mit den Skalaren a, b

(e) $[\mathbf{A},[\mathbf{B},\mathbf{C}]] + [\mathbf{B},[\mathbf{C};\mathbf{A}]] + [\mathbf{C},[\mathbf{A},\mathbf{B}]] = 0$

(f) Zeige, dass zwei gleichzeitig diagonalisierbare Operatoren kommutieren. Schlussfolgere, dass zwei nicht kommutierende aber diagonalisierbare Operatoren nicht gleichzeitig diagonalisiert werden können.

(g) Was bedeutet es für eine physikalische Messung, wenn zwei Operatoren kommutieren?

Aufgabe 2: Paulimatrizen **(7 Punkte)**
Die Paulimatrizen sind gegeben durch

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) Berechnen Sie die Kommutatoren $[\sigma_x, \sigma_y]$, $[\sigma_x, \sigma_z]$, $[\sigma_y, \sigma_z]$.

(b) Betrachten Sie den Operator σ_i mit $i = x, y, z$ und die Eigenwertgleichung $\sigma_i \psi_{s_i} = s_i \psi_{s_i}$. Berechnen Sie die Eigenwerte s_i und die normierten Eigenvektoren ψ_{s_i}.

(c) Bestimmen Sie die Eigenvektoren der Operators σ_z in der Basis der Eigenvektoren des Operators σ_x.

Aufgabe 3: Orthogonale Funktionen **(7 Punkte)**
Betrachten Sie den Vektorraum

$$V = \{f : [0,\pi] \to \mathbb{R} | f(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \sin(2x) + c_3 \sin(3x) \text{ mit } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\} \tag{2}$$

Die Funktionen

$$v_1(x) = \sin(x), \tag{3}$$
$$v_2(x) = \sin(2x), \tag{4}$$
$$v_3(x) = \sin(3x) \tag{5}$$

bilden offenbar eine Basis des Vektorraums V.

(a) Zeigen Sie, dass v_1, v_2 und v_3 bezüglich des Skalarproduktes

$$g(v,w)=\int_0^\pi v(x)w(x)dx \tag{6}$$

orthogonal sind.

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis (ONB) dieses Vektorraums.

(c) Berechnen Sie die orthogonale Projektion der Funktion

$$f(x)=\begin{cases} x, & x<\frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & x\geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{7}$$

auf den Vektorraum V bezüglich $g(\ ,\ )$.

Tipp : Zeigen Sie zunächst

$$\sin(ax)\sin(bx)=\frac{1}{2}(\cos((a-b)x)-\cos((a+b)x)). \tag{8}$$

Webseite zur Vorlesung:
`http://people.het.physik.tu-dortmund.de/~ghiller/TH2-SS2017.html`