Vorlesung zur Quantenfeldtheorie — SoSe 2019
3. Übungsblatt

Prof. Dr. Gudrun Hiller

Ausgabe: Donnerstag, den 25.04.2019
Abgabe: Dienstag, den 30.04.2019, 11 Uhr

Übungsleiter: Rigo Bause und Kevin Moch

Aufgabe 1: Statistische Mechanik — 10 Punkte

Es soll der Zusammenhang zwischen der statistischen Mechanik und dem Pfadintegral in der Quantenmechanik untersucht werden.
Zeigen Sie dazu, dass die Zustandssumme eines kanonischen Ensembles $Z = \mathrm{Tr}\exp(-\beta H)$ mit $\beta = \frac{1}{k_B T}$ (im einfachen Fall eines Systems mit einem Freiheitsgrad) in Pfadintegraldarstellung geschrieben werden kann als

$$Z = \int \mathrm{d}q_0 \int \mathcal{D}q \exp\left(\mathrm{i}\int_0^{-\mathrm{i}\beta} \mathrm{d}t\, \Lambda(q,\dot{q})\right) \quad , \tag{1}$$

wobei $q_0 = q(t=0) = q(-\mathrm{i}\beta)$ gilt und $\Lambda(q,\dot{q})$ die klassische Lagrangefunktion in *euklidischer Zeit* $\tau = \mathrm{i}t$ bezeichnet.

Hinweise:

- Sie können weitgehend analog zur Herleitung des Pfadintegrals in der Vorlesung vorgehen.
- Verwenden Sie die *Trotter Produktformel*

$$\exp\left[-\beta\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q})\right)\right] = \lim_{N\to\infty}\left[\exp\left(-\beta\frac{V(\hat{q})}{2N}\right)\exp\left(-\beta\frac{\hat{p}^2}{2mN}\right)\exp\left(-\beta\frac{V(\hat{q})}{2N}\right)\right]^N \quad . \tag{2}$$

- Unterscheiden Sie klar zwischen Operatoren und ihren Eigenwerten.

Aufgabe 2: Green'sche Funktion des harmonischen Oszillators — 5 Punkte

Die Hamiltonfuktion des harmonischen Oszillators lautet

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2. \tag{3}$$

Der Vakuumerwartungswert in Anwesenheit eines externen Feldes $f(t)$ lautet

$$\langle 0|0\rangle|_f = \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\mathrm{d}t' f(t) G(t-t') f(t')\right\}, \tag{4}$$

wobei der Kernel gegeben ist als

$$G(t-t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}E}{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E(t-t')}}{-E^2 + \omega^2 - \mathrm{i}\epsilon}. \tag{5}$$

Zeigen Sie, dass G eine Green'sche Funktion des harmonischen Oszillators ist, d.h. dass die Gleichung

$$[\partial_t^2 + \omega^2] G(t-t') = \delta(t-t') \tag{6}$$

erfüllt ist.

Aufgabe 3: Baker-Campbell-Hausdorff-Formel **5 Punkte**

Gegeben seien die Operatoren A und B auf einem Hilbert-Raum, die im Allgemeinen nicht miteinander kommutieren. Die Exponentialfunktion e^A eines Operators A ist über ihre Potenzreihe definiert, wobei Sie im Folgenden die Konvergenz solcher Reihen voraussetzen können.

a) Beweisen Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\,\mathrm{e}^{\alpha A} = A\,\mathrm{e}^{\alpha A}$ (mit $\alpha \in \mathbb{R}$) und $\left(\mathrm{e}^A\right)^{-1} = \mathrm{e}^{-A}$.

b) Beweisen Sie die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel

$$\mathrm{e}^A\,B\,\mathrm{e}^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,[A,B]_n \quad , \tag{7}$$

wobei der multiple Kommutator $[.,.]_n$ wie folgt rekursiv definiert ist:

$$[A,B]_0 = B, \quad [A,B]_n = \big[A,[A,B]_{n-1}\big] \quad .$$

Hinweis: Betrachten Sie die Taylor-Reihe der operatorwertigen Funktion $F(x) = \mathrm{e}^{xA}\,B\,\mathrm{e}^{-xA}$ der Hilfsvariablen x um den Punkt $x = 0$.

c) Beweisen Sie die speziellen BCH-Formeln

$$\mathrm{e}^A\,\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B\,\mathrm{e}^A\,\mathrm{e}^{[A,B]} \quad , \tag{8}$$

$$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A\,\mathrm{e}^B\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[A,B]} \quad , \tag{9}$$

die unter der Voraussetzung $[A,[A,B]] = [B,[B,A]] = 0$ gelten.