3. Übungsblatt zur Vorlesung **WS 2015/2016**
Theoretische Physik I **Prof. G. Hiller**
Abgabe: bis Dienstag, den 10. November 2015 16:00 Uhr

Aufgabe 1: Arbeit im (konservativen?) Kraftfeld **(5 Punkte)**
In dieser Aufgabe betrachten wir das Vektorfeld

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{1}$$

(a) Berechnen Sie $\nabla \times \vec{F}(x,y,z)$. Was bedeutet dies für die Arbeit $W := \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ entlang eines Weges $\vec{s}$ von Punkt A nach Punkt B? Finden Sie ein Potential $\Phi(x,y,z)$, sodass $-\nabla\Phi(x,y,z) = \vec{F}(x,y,z)$ ist.

(b) Berechnen Sie die Arbeit des Kraftfeldes $\vec{F}$ entlang des geschlossenen Weges

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

von $t = 0$ bis $t = 1$.

(c) Wie kann der Widerspruch zwischen a) und b) begründet werden? Informieren Sie sich dazu, ob die Bedingung aus a) hinreichend ist.

Aufgabe 2: Galilei-Transformation **(5 Punkte)**
Wir betrachten die Galilei-Transformation

$$t' = t \tag{3}$$
$$\vec{x}' = R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{x}_0 \quad , \tag{4}$$

welche die Ort und Zeitkoordinaten $(\vec{x}, t)$ nach $(\vec{x}', t')$ überführt. Dabei sind $\vec{v}$ und $\vec{x}_0$ konstante Vektoren und R eine spezielle orthogonale Matrix.

(a) Ein Körper bewege sich gemäß

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{w}(t - \tau) \quad , \tag{5}$$

mit $\vec{r}_0 = (0,0,3)^T$ m , $\vec{w} = (1,0,1)^T$ m/s und $\tau = 3$ s. Geben Sie eine Galilei-Transfomation so an, dass

$$\vec{r}'(t') = (0,0,0)^T \tag{6}$$

die Bahnkurve des Körpers beschreibt. Beschreiben Sie die Bahnkurve (6) physikalisch.

(b) Betrachten Sie $d := ||\vec{x}_1 - \vec{x}_2||$ und $d' := ||\vec{x}_1' - \vec{x}_2'||$ sowie $\vec{p} := m\mathrm{d}\vec{x}/\mathrm{d}t$ und $\vec{p}' := m\mathrm{d}\vec{x}'/\mathrm{d}t'$ für beliebige $\vec{x}_{1,2}$. Interpretieren Sie die Gleichheiten bzw. Unterschiede physikalisch.

(c) Zeigen Sie, dass die Hintereinanderausführung zweier Galilei-Transformationen wieder eine Galilei-Transformation ist.

Aufgabe 3: Integration auf Linien, Flächen und Volumina **(5 Punkte)**

(a) Es soll die Masse eines linienförmigen Körpers (z.B. eines Taus) berechnet werden. Dazu sei $\vec{c}$ eine Kurve von $\vec{c}(t=0)=\vec{a}$ nach $\vec{c}(t=T)=\vec{b}$, die die Form des Körpers beschreibe und ϱ eine Linienmassendichte, die entlang $\vec{c}$ definiert ist. Geben Sie eine Formel für die Gesamtmasse des Körpers an. Sei nun $\vec{c}(t)=vt(1,1,0)^T$ für $0 \leq t \leq 2$ s und $\vec{c}(t)=v(t-2\text{ s})(-1,-1,0)^T+2v\text{ s}(1,1,0)^T$ für $2\text{ s} \leq t \leq 4$ s, sowie $v=1$ m/s. Außerdem sei $\varrho(x,y,z)=x\varrho_0$. Zeichnen Sie die Kurve und berechnen Sie die Gesamtmasse.

(b) Die Funktion

$$\vec{\alpha}_r(\vartheta,\varphi)=r\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\sin(\vartheta)\\ \sin(\varphi)\sin(\vartheta)\\ \cos(\vartheta)\end{pmatrix} \tag{7}$$

beschreibt eine Sphäre mit Radius r, wobei $\vartheta \in \{0,\pi\}$ und $\varphi \in \{0,2\pi\}$.

Sei nun $\vec{F}(r,\vartheta,\varphi)=\frac{1}{|\vec{r}|^2}\vec{e}_r$ und ϱ eine Flächendichte, die auf der Sphäre definiert ist. Bestimmen Sie die Gesamtmasse der Sphäre und den Fluss Φ von $\vec{F}$ durch die Sphäre.

(c) Begründen Sie die Radiusunabhängigkeit des Flusses Φ mit dem Satz von Gauß.

Aufgabe 4: Stokes **(5 Punkte)**

(a) Geben Sie den Satz von Stokes als Formel und in Worten an.

(b) Integrieren Sie die Rotation des Vektorfeldes (*Achtung: Zylinderkoordinaten*)

$$\vec{F}(r,\varphi,z)=r\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix} \tag{8}$$

über die Sphäre des Radius R und über die Halbsphäre ($z>0$) des Radius R.