Vorlesung zur Quantenfeldtheorie SoSe 2019
2. Übungsblatt

Prof. Dr. Gudrun Hiller

Ausgabe: Donnerstag, den 18.04.2019
Abgabe: Dienstag, den 23.04.2019, 11 Uhr

Übungsleiter: Rigo Bause und Kevin Moch

Aufgabe 1: Pfadintegral und Funktionalableitung — 8 Punkte

Wir betrachten ein quantenmechanisches System mit der Hamiltonfunktion $H = H_0 + H_1$. Der Vakuumerwartungswert in Anwesenheit externer Felder $f(t)$ und $h(t)$ sei definiert als das **Pfadintegral**:

$$\langle 0|0\rangle\big|_{f,h} = \int \mathcal{D}p\,\mathcal{D}q\,\exp\left\{\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\left(p\dot{q} - H(p,q) + fq + hp\right)\right\} \quad , \tag{1}$$

wobei die Integrationsmaße $\mathcal{D}p$ und $\mathcal{D}q$ wie in der Vorlesung gegeben sind und die Exponentialfunktion über ihre Reihendarstellung gegeben ist. Zeigen Sie, dass sich Gleichung (1) mittels der Funktionalableitung wie folgt schreiben lässt:

$$\begin{aligned}\langle 0|0\rangle\big|_{f,h} = \exp&\left\{-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\,H_1\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta h},\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta f}\right)\right\}\\ &\int \mathcal{D}p\,\mathcal{D}q\,\exp\left\{\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\left(p\dot{q} - H_0(p,q) + fq + hp\right)\right\} \quad .\end{aligned} \tag{2}$$

Aufgabe 2: Residuensatz — 5 Punkte

Zeigen Sie mittels des Residuensatzes ($z \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\,\frac{\mathrm{i}}{k^2 - E^2 + \mathrm{i}\varepsilon}\,\exp(-\mathrm{i}kz) = \frac{1}{2E}\Big(\theta(z)\,\exp(-\mathrm{i}Ez) + \theta(-z)\,\exp(+\mathrm{i}Ez)\Big) \tag{3}$$

und

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\,\frac{1}{k^2 + E^2}\,\exp(+\mathrm{i}kz) = \frac{1}{2E}\Big(\theta(z)\,\exp(-Ez) + \theta(-z)\,\exp(+Ez)\Big) \quad . \tag{4}$$

Aufgabe 3: Gauß'sche Integration — 7 Punkte

Gegeben sei die Amplitude

$$\langle q'', t''|q', t'\rangle = \int \mathcal{D}_q\mathcal{D}_p\exp\left\{\mathrm{i}\int_{t'}^{t''}\mathrm{d}t(p\dot{q} - H(p,q))\right\} \tag{5}$$

mit der Integration über alle Pfade von $q' = q(t')$ nach $q'' = q(t'')$ mit beliebigen Impulsen. Die Hamiltonfunktion lasse sich als ein Polynom zweiter Ordnung in den Impulsen schreiben.
Zeigen Sie, dass mit der Lagrangefunktion L gilt:

$$\langle q'', t''|q', t'\rangle = \int \mathcal{D}'_q\exp\left\{\mathrm{i}\int_{t'}^{t''}\mathrm{d}tL(\dot{q}(t), q(t))\right\} \tag{6}$$

und bestimmen Sie explizit das Integrationsmaß $\mathcal{D}'_q$.