Vorlesung zur Quantenfeldtheorie SoSe 2019
1. Übungsblatt

Prof. Dr. Gudrun Hiller

Ausgabe: Donnerstag, den 04.04.2019
Abgabe: Dienstag, den 09.04.2019, 11 Uhr Übungsleiter: Rigo Bause und Kevin Moch

Aufgabe 1: Lorentztransformationen 5 Punkte

Die Aufgabe dient der Auffrischung des Umgangs mit Lorentztransformationen. Eine homogene Lorentztransformation eines Vierervektors x^μ lautet $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu$.

a) Warum gilt $|\det(\Lambda)| = 1$? Zeigen Sie dies explizit.

b) Zeigen Sie: Die zeitliche Ordnung zweier Ereignisse x_1 und x_2 mit zeitartigem Abstand $(x_1 - x_2)^2 > 0$ bleibt unter eigentlichen orthochronen Lorentztransformationen (Transformationen mit $\det(\Lambda) = 1$ und $\Lambda^0{}_0 > +1$) erhalten, bei Ereignissen mit raumartigem Abstand $(x_1 - x_2)^2 < 0$ hingegen nicht notwendigerweise.
Nutzen Sie Metrikkonvention $\mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$.

Hinweis: Begründen Sie geometrisch.

Aufgabe 2: Kanonische Quantisierung eines reellen Skalarfeldes 10 Punkte

Das quantisierte reelle Skalarfeld mit Masse m ist gegeben als

$$\varphi(\vec{x}, t) = \int \mathrm{d}^3\tilde{p} \, \left(a_p \, e^{-\mathrm{i}px} + a_p^\dagger \, e^{\mathrm{i}px} \right) \quad , \tag{1}$$

mit $p^0 = E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ und der Normierung $\mathrm{d}\tilde{p} = \frac{\mathrm{d}p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}}$. Das kanonisch konjugierte Feld ist definiert durch $\Pi(\vec{x}, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$. In der Quantentheorie gilt folgende Vertauschungsrelation:

$$[\varphi(\vec{x}, t), \Pi(\vec{y}, t)] = \mathrm{i} \, \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \, . \tag{2}$$

a) Welchen Vertauschungsrelationen müssen die Operatoren a_p und $a_p^\dagger$ genügen, damit die obige Relation erfüllt ist?

b) Zeigen Sie, dass in der freien Theorie mit dem Hamiltonoperator $H = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} E_p \, a_p^\dagger a_p$ der angegebene Feldoperator (1) ein Operator im Heisenbergbild ist. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Berechnen Sie $\dot{\varphi}$,
2. Berechnen Sie $[H, \varphi]$,
3. Zeigen Sie, dass der Feldoperator im Schrödingerbild zeitunabhängig ist, also dass die zeitliche Ableitung von $\varphi_S := \exp(-\mathrm{i}Ht)\varphi \exp(\mathrm{i}Ht)$ verschwindet.
4. Zeigen Sie nun, dass φ die Heisenberggleichung

$$\dot{\varphi}_H = \mathrm{i}[H, \varphi_H] + (\dot{\varphi}_S)_H \tag{3}$$

erfüllt, wobei φ_H dem Feldoperator im Heisenbergbild entspricht.

Aufgabe 3: Quantenfelder **5 Punkte**

In der Vorlesung wurde eine Theorie nichtrelativistischer Quantenfelder mit Hamiltonoperator

$$H = \int \mathrm{d}^3x \, a^\dagger(\vec{x}) \left(-\frac{\nabla^2}{2m} + U(\vec{x}) \right) a(\vec{x}) \tag{4}$$

diskutiert. Der Teilchenzahloperator lautet $N = \int \mathrm{d}^3x \, a^\dagger(\vec{x}) \, a(\vec{x})$.
Warum gilt $[H, N] = 0$? Wechselwirkungen welcher Art in H würden einen nichtverschwindenden Kommutator ergeben?