Übungen zur Quantenfeldtheorie I im SoSe 16 — Blatt 6

Abgabe bis Mittwoch, den 8. Juni 2016

Aufgabe 1: "Polarisierende Persönlichkeit"

In der Vorlesung wurden bei der Konstruktion massebehafteter Vektorfelder Polarisationsvektoren definiert durch die bei der Wigner-Klassifikation der Einteilchenzustände eingeführten Standardtransformation $L^\mu{}_\nu(\mathbf{p})$ als $e^\mu(\mathbf{p},\sigma) := L^\mu{}_\nu(\mathbf{p})\, e^\nu(\mathbf{0},\sigma)$, wobei

$$e^\mu(\mathbf{0},0) := \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad e^\mu(\mathbf{0},+1) := -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\+i\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad e^\mu(\mathbf{0},-1) := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{1}$$

Wir wollen nun die in der Vorlesung verwendete Relation

$$\sum_\sigma e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\, e^{\nu *}(\mathbf{p},\sigma) \stackrel{!}{=} \Pi^{\mu\nu}(\mathbf{p}) := \eta^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m^2}, \tag{2}$$

zeigen, wobei wieder $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$.

a) Beweisen sie Gl. (2) für den Spezialfall $\mathbf{p} = 0$.

b) Schliessen Sie nun aus der definierenden Eigenschaft der Standardtransformation $L^\mu{}_\nu(\mathbf{p})$ auf den allgemeinen Fall. Überprüfen Sie dabei die Gleichheit der Operatoren, indem Sie ihre Matrixelemente bezüglich einer geschickt gewählten Basis vergleichen!

c) Welche Komplikation ergibt sich bei einer Konstruktion von Vektorfeldern mittels der Polarisationsvektoren im masselosen Grenzfall und warum stellt das im Standardmodell dennoch kein Problem dar?

Aufgabe 2: "Recht und Normalordnung"

Wir definieren die Normalordnung vorerst nur für Produkte von beliebig vielen (im allgemeinen unterschiedlichen und sowohl bosonischen als auch fermionischen) Erzeugern und Vernichtern dadurch, dass, solange wie möglich, jeder unmittelbar links von einem Erzeuger stehende Vernichter mit diesem formal ausgetauscht wird, ohne dabei (Anti-)Kommutationsrelationen zu verwenden. Jedes mal, wenn zwei fermionische Operatoren vertauscht werden, wird dabei zusätzlich mit einem (-1) multipliziert. Wir verwenden die Notation $:X:$ für die Normalordnung des Ausdrucks X.

a) Zeigen Sie, dass sowohl für bosonische als auch fermionische Erzeuger $a^\dagger$ gilt $aa^\dagger =: aa^\dagger : +1$ und berechnen sie für bosonische $b_i^\dagger$ und fermionische $f_i^\dagger$ die Ausdrücke

$$: b_1^\dagger b_2 b_3^\dagger :, \qquad : f_1 f_1^\dagger f_2 :, \qquad : b_1 f_1 b_2^\dagger f_2^\dagger :, \qquad : b_2^\dagger b_1 f_1 :, \qquad : b_2^\dagger f_1 b_1 :, \qquad : f_1 b_1^\dagger b_1 : .$$

b) Zeigen Sie, dass der Vakuumerwartungswert eines normalgeordneten Operators $: X :$ verschwindet, jedoch im Allgemeinen nicht immer $: X := X - \langle 0|X|0\rangle$ gilt.

c) Berechnen Sie die Normalordnung einer beliebigen Aneinanderkettung von fermionischen Erzeugern und Vernichtern des selben Zustandes!

Optimalerweise würde man die Normalordnung gerne als Funktion implementieren, die einen beliebigen Operator auf den normalgeordneten Operator abbildet. Um die zentrale Eigenschaft des verschwindenden Vakuumerwartungswertes zu erhalten, müsste diese Abbildung linear sein, sodass die Normalordnung Term für Term durchgeführt wird.

d) Zeigen Sie, dass dies nicht möglich ist, indem Sie mit diesen Annahmen einen Widerspruch herleiten!

Stattdessen ist die Normalordnung eines allgemeinen Operators, der nicht nur Produkt von Erzeugern und Vernichtern ist, als Kurzschreibweise zu verstehen, welche nicht nur von dem Operator abhängt, sondern auch von der Form in der er aufgeschrieben ist! Dazu werden erst alle Klammern ausmultipliziert und Operatorfunktionen als Potenzreihen expandiert *ohne den Ausdruck mit weiteren Relationen umzuschreiben* und im Anschluss termweise normalgeordnet.

e) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke bosonischer Operatoren b:

$$: (b + b^\dagger)(b - b^\dagger) :, \qquad : bb^\dagger - b^\dagger b :, \qquad : \exp(bb^\dagger) : .$$

Diese Konvention kommt in der QFT insbesondere bei der Normalordnung von Produkten kausaler Felder zum Einsatz.

Aufgabe 3: "Abgeleitete Felder"

In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass das Spin 0 Vektorfeld nichts anderes als die Raumzeitableitung eines skalaren Feldes ist. Wir wollen nun umgekehrt aufzeigen dass Ableitungen eines beliebigen Feldes selbst Felder darstellen. Wir nennen dabei solche Operatoren (Erzeuger- bzw. Vernichter-) Quantenfeld, die sich darstellen lassen als

$$\psi_l^-(x) = \sum_{\sigma,n} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} v_l(\mathbf{p},\sigma,n)\; e^{-i\,p\cdot x}\; a^\dagger(\mathbf{p},\sigma,n), \tag{3}$$

$$\psi_l^+(x) = \sum_{\sigma,n} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} u_l(\mathbf{p},\sigma,n)\; e^{+i\,p\cdot x}\; a(\mathbf{p},\sigma,n) \tag{4}$$

und mit einer Darstellung D der Lorentzgruppe das folgende Transformationsverhalten besitzen:

$$U_0(\Lambda, a)\ \psi_l^{\pm}(x)\ U_0^{-1}(\Lambda, a) = \sum_{l'} D_{ll'}(\Lambda^{-1})\ \psi_{l'}^{\pm}(\Lambda x + a) \tag{5}$$

a) Zeigen Sie, dass $\tilde{\psi}_{\tilde{l}}^{\pm}(x) = \partial_\mu \psi_l^{\pm}(x)$ mit $\tilde{l} = (\mu, l)$ wieder ein Quantenfeld ist, geben Sie also seine Koeffizienten $\tilde{u}_{\tilde{l}}(\mathbf{p}, \sigma, n)$ und $\tilde{v}_{\tilde{l}}(\mathbf{p}, \sigma, n)$ an sowie die Darstellung $D_{\tilde{l}\tilde{l}'}(\Lambda^{-1})$, unter der sie transformieren.

b) Welche Kommutatorrelationen erfüllen die neuen Felder $\tilde{\psi}_{\tilde{l}}^{\pm}(x)$, ausgedrückt durch Kommutatoren von $\psi_l^{\pm}(x)$? Was bedeutet das für die Konstruktion kausaler Felder?

Aufgabe 4: "Kopplungen von $SU(2)$-Vektordarstellungen"

Betrachten Sie das skalare Meson π in der $SU(2)$-Vektordarstellung $\vec{\pi}(x) = (\pi_1(x), \pi_2(x), \pi_3(x))$ mit den Ladungszuständen $\pi^+ = (\pi_1 - i\pi_2)/\sqrt{2}$, $\pi^- = (\pi_1 + i\pi_2)/\sqrt{2}$ und $\pi^0 = \pi_3$. Das Feld $\vec{\pi}$ transformiere wie ein Vektor unter $SU(2)$, das heißt $\pi_j \to (e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{t}})_{jk}\, \pi_k$ mit $(t_j)_{kl} = -i\varepsilon_{jkl}$ und reellen Parametern α_j.
Definieren Sie $\Pi = \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}$ mit den Pauli-Matrizen $\vec{\tau}$ und zeigen Sie, dass $\Pi \to U^\dagger \Pi U$ mit $U = e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}/2}$ unter $SU(2)$. Analog gilt für das Vektor-Meson ρ, dass $P_\mu \to U^\dagger P_\mu U$ mit $P_\mu = \vec{\tau} \cdot \vec{\rho}_\mu$ für das Feld $\vec{\rho}_\mu(x)$.
Konstruieren Sie nun eine Lorentz-skalare $SU(2)$-invariante $\rho\pi\pi$ Kopplung aus den Feldern. Zeigen Sie dazu, dass es genügt, die Spur $\mathrm{Sp}[P_\mu \partial^\mu \Pi\Pi\Pi]$ zu betrachten und berechnen Sie diese. Was folgt damit für die Zerfallsbreiten $\Gamma(\rho \to \pi\pi)$?
Betrachten Sie nun noch das $SU(2)$-skalare Vektor-Meson ω und konstruieren Sie analog die $\rho\pi\omega$ Kopplung.

Webseite zur Vorlesung:
`http://www.physik.tu-dortmund.de/jbrod/teaching/SS16/index.html`