10. Übungsblatt zur Vorlesung **WS 2015/2016**
Einführung in die Elementarteilchentheorie **Prof. H. Päs**
Abgabe: bis Fr. 22. Januar 2016 10:00 Uhr

Beginn der Übungsgruppen
Gruppe I/II: Mi 11.11. 14-16 Uhr, Raum SRG 1 3.009/3.013
Gruppe III: Mi 11.11. 16-18 Uhr, Raum P1-01-306

Aufgabe 1: Wirkungsquerschnitt zum Prozess $q\overline{q} \to Q\overline{Q}$ **(8 Punkte)**

Betrachten Sie den Prozess $q\overline{q} \to Q\overline{Q}$ mit verschiedenen Quarks q und Q im Anfangs- und Endzustand.

(a) Zeichnen Sie alle Feynmandiagramme, die in niedrigster Ordnung α_s zum Prozess beitragen.

(b) Zeigen Sie, dass das Matrixelement $\mathcal{M}_{\text{abcd}}$ folgendermaßen faktorisiert:

$$\mathcal{M}_{\text{abcd}} = \mathcal{M}_{\text{Dirac}}\Phi_{\text{abcd}} \qquad \text{und} \qquad |\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_{\text{Dirac}}|^2|\Phi|^2. \tag{1}$$

Bei Φ_{abcd} handelt es sich um den Farbfaktor der QCD, während $\mathcal{M}_{\text{Dirac}}$ die Dirac-Struktur des Matrixelements darstellt. Die Farbstruktur kann im Allgemeinen immer auf diese Weise abgespalten werden.

Bemerkung: Verwenden Sie folgende Darstellung der QCD-Feynmanregeln zur Berechnung des Matrixelements:

$$\begin{aligned}
\text{Einlaufendes Teilchen:} &\quad q_i(p) \to u(p)e_i \\
\text{Auslaufendes Teilchen:} &\quad q_i(p) \to \overline{u}(p)e_i^\dagger \\
\text{Einlaufendes Antiteilchen:} &\quad \overline{q}_i(p) \to \overline{v}(p)e_i^\dagger \\
\text{Auslaufendes Antiteilchen:} &\quad \overline{q}_i(p) \to v(p)e_i \\
\text{Vertex:} &\quad \Gamma_\mu \to i g_s \gamma_\mu \lambda_A \\
\text{Gluonpropagator in Feynman-Eichung:} &\quad D_F(q^2) \to \frac{-i g^{\mu\nu}\delta^{AB}}{q^2}
\end{aligned}$$

Kleine lateinische Indizes laufen über die drei Einheitsvektoren e_i der **fundamentalen** Darstellungen der $SU(3)$ (**3** und $\overline{\mathbf{3}}$), d.h. sie bezeichnen die Farbindizes der Quarks. Große lateinische Indizes laufen über die **adjungierte** Darstellung der $SU(3)$ (**8**), die aus den Generatoren λ_A gebildet wird. Griechische Indizes bezeichnen Minkowski-Indizes. Es gilt bei allen die übliche Summenkonvention.

(c) Berechnen Sie $|\overline{\mathcal{M}}|^2$. Summieren Sie über Spins und Farbe im Endzustand und mitteln sie über Spin und Farbe im Anfangszustand. Für Ihre Rechnung können Sie das Zwischenergebnis

$$|\overline{M_{\text{Dirac}}}|^2 = g_s^4(1+\cos^2\theta) \tag{2}$$

verwenden. Hierbei ist θ der Streuwinkel zwischen dem einlaufenden Quark q und dem auslaufenden Quark Q. Erklären Sie warum Sie es benutzen dürfen und woher es kommt.

Hinweis: Benutzen Sie die Feynman-Spurtechnik für die $SU(3)$-Struktur. Verwenden Sie die Identität

$$\{\lambda_A, \lambda_B\} = \frac{1}{3}\delta_{AB}\mathbb{1}_3 + d_{ABC}\lambda_C. \tag{3}$$

Die symmetrischen Strukturkonstanten d_{ABC} sind nicht notwendig für Ihre Rechnung! Begründen Sie warum.

Aufgabe 2: Drell-Yan-Prozess $p\overline{p} \to \mu^+\mu^- + X$ und "neue Physik" (8 Punkte)

Analog zu Drell-Yan-artigen Prozessen für pp-Streuung gibt es auch Drell-Yan Prozesse für $p\bar{p}$-Streuung. Hier sollen ein Quark-Antiquark-Paar des kollidierenden $p\bar{p}$-Paares über ein virtuelles Photon in den Endzustand eines Muon-Paares, sowie die verbleibenden Fragmente X des $p\bar{p}$-Paares zerfallen.

a) Was ändert sich bei der Berechnnung des hadronischen Wirkungsquerschnittes für die Streuung von $p\bar{p}$-Paaren im Gegensatz zu pp-Paaren? Geben Sie die Formel für den hadronischen Wirkungsquerschnitt an.

b) Nehmen Sie nun an, dass es neben dem Austausch des virtuellen Photons γ die zusätzliche Möglichkeit des Austausches eines hypothetischen massiven Photons γ' mit den gleichen Kopplungen an Quarks und Leptonen wie das γ gibt. Das γ' habe die Masse M und eine Lebensdauer $1/\Gamma$. Berechnen Sie den partonischen Wirkungsquerschnitt unter Berücksichtigung des Beitrages des γ'.

   Hinweis: Der Propagator des γ' mit Impuls q sei durch die Breit-Wigner Form $-ig^{\mu\nu}/(q^2 - M^2 + iM\Gamma)$ gegeben.

c) Der hadronische Wirkungsquerschnitt für Aufgabe b) ergibt sich mit Hilfe der Formel aus a), wobei nun der partonische Wirkungsquerschnitt den zusätzlichen Beitrag vom γ' enthält. Welchen qualitativen Unterschied erwarten Sie durch den Austausch des γ' im differentiellen Wirkungsquerschnitt $d^2\sigma/dM_{ll}^2 d\eta$, wobei $M_{ll}^2 = q^2$ die (quadrierte) invariante Masse des Muon-Paares ist und η dessen Rapidität, d.h., $q^0 = M_{ll}\cosh\eta$? Wie lautet die M_{ll}-Abhängigkeit ohne und mit γ'-Beitrag?

Aufgabe 3: Laufende Kopplungskonstanten (4 Punkte)

In Eichtheorien besitzen die Kopplungskonstanten α_i die Eigenschaft, impuls- bzw. skalenabhängig zu sein. Die sogenannte Renormierungsgruppengleichung stellt dabei eine Relation zwischen den Werten der Kopplungskonstanten an zwei verschiedenen Skalen μ_0 und μ her. Sie hat in niedrigster Ordnung Störungstheorie die Lösung:

$$\alpha_i(\mu) = \frac{\alpha_i(\mu_0)}{1 + \frac{\alpha_i(\mu_0)}{4\pi}\beta_0^{(i)}\ln\frac{\mu^2}{\mu_0^2}}. \tag{4}$$

Das Verhalten ist im Wesentlichen durch die β-Funktion (bzw. deren führenden Koeffizienten $\beta_0^{(i)}$) bestimmt. Man erhält für die starke Wechselwirkung ($i = s$, QCD) und die elektromagnetische Wechselwirkung ($i = e$, QED):

$$\beta_0^{(s)} = \frac{11}{3}N_c - \frac{2}{3}N_f, \tag{5}$$

$$\beta_0^{(e)} = -\frac{4}{3}\sum_i Q_i^2 = -\frac{4}{3}(Q_u^2 N_c N_u + Q_d^2 N_c N_d + Q_l^2 N_l). \tag{6}$$

Hierbei ist $N_c = 3$ die Anzahl der Farbladungen der Quarks unter $SU(3)$ und N_f die Anzahl der aktiven Quarks. N_u ist die Anzahl der aktiven Quarks mit Ladung $Q_u = 2/3$ und analog N_d für $Q_d = -1/3$. Die Anzahl der aktiven Leptonen mit $Q_l = -1$ ist N_l.

Als Anfangswert für α_s wird üblicherweise der gemessene Wert $\alpha_s(\mu_0 = M_Z) = 0.119$ an der Skala der Z-Bosonenmasse $M_Z = 91.19$ GeV (mit $N_f = 5$) verwendet. An der gleichen Skala erhält man für $\alpha_e(\mu_0 = M_Z) = 1/127.8$.

(a) Veranschaulichen Sie sich graphisch die Skalenabhängigkeit von α_s für Skalen $\mu < M_Z$ unter Verwendung von $\alpha_s(M_Z)$ als Anfangsbedingung. Vereinfachend darf ein festes $N_f = 5$ angenommen werden. Bei welcher Skala $\mu = \Lambda$ verschwindet der Nenner in Gl.(4)?

(b) Bei welcher Skala μ gilt $\alpha_s(\mu) = \alpha_e(\mu)$?
Hinweis: Die Skala der "Vereinigung" der Kopplungskonstanten liegt bei $\mu > M_Z$. Wählen Sie bei einer graphischen Lösung einen geeigneten Maßstab der Darstellung.

Zusatz: Ein Quark bzw. Lepton wird als "aktiv bei einer Skala μ" bezeichnet, wenn für seine Masse M gilt $M \leq \mu$. Deshalb ist die Anzahl der aktiven Quarks $N_f = 5$ an der Skala $\mu = M_Z$, da das t-Quark mit seiner Masse von $M_t \simeq 172\,\text{GeV}$ zu schwer ist, um bei dieser Skala aktiv am Laufen der Kopplungen teilzunehmen. Sobald die Skala μ die Schwelle der t-Masse erreicht hat, muss $N_f = 6$ verwendet werden, d.h. an der Skala $\mu = M_t$ gilt in sehr guter Näherung die Anschlußbedingung $\alpha_i^{(N_f=5)}(M_t) = \alpha_i^{(N_f=6)}(M_t)$.