9. Übungsblatt zur Vorlesung **WS 2015/2016**
Einführung in die Elementarteilchentheorie **Prof. H. Päs**
Abgabe: bis Fr. 15. Januar 2015 10:00 Uhr

Aufgabe 1: $SU(3)_C$-Symmetrie (7 Punkte)

(a) Zeigen Sie die Invarianz des Dirac-Anteils der QCD-Lagrangedichte

$$\overline{\psi}(i\not{D} - m)\psi \tag{1}$$

unter einer lokalen $SU(3)_C$-Eichtransformation mit der kovarianten Ableitung

$$D^\mu = \partial^\mu + i g_s \lambda_j G_j^\mu, \tag{2}$$

mit $G^\mu = \lambda_j G_j^\mu$. Die Quarks und Gluonen transformieren dabei wie folgt:

$$\psi \to \psi' = \exp\left[i \sum_{j=1}^{N^2-1} \phi_j(x)\lambda_j \right] \psi = U(x)\psi \tag{3}$$

$$G^\mu \to G^{'\mu} = U(x) G^\mu U^\dagger(x) - \frac{i}{g_s} U(x) \partial^\mu U^\dagger(x). \tag{4}$$

Hierbei sind $\phi_j(x)$ die infinitesimalen lokalen Transformationsparameter und λ_j die Generatoren der Gruppe.

(b) Aus den Eichfeldern G_j^μ lässt sich analog zur QED ein Gluonfeldstärketensor definieren:

$$G^{\mu\nu} = \partial^\mu G^\nu - \partial^\nu G^\mu + i g_s [G^\mu, G^\nu], \tag{5}$$

wobei $G^{\mu\nu} = \lambda_j G_j^{\mu\nu}$ ist. Leiten Sie das Transformationsverhalten für $G^{\mu\nu}$ her und zeigen Sie damit die Invarianz des kinetischen Terms der QCD-Lagrangedichte:

$$-\frac{1}{4} G_{j,\mu\nu} G_j^{\mu\nu}. \tag{6}$$

Tipp: Untersuchen Sie die Spur über $G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}$!

Aufgabe 2: Matrixelement zum Prozess $q\overline{q} \to gg$ (5 Punkte)

(a) Zeichnen Sie alle Feynmandiagramme, die in niedrigster Ordnung zum Prozess $q\overline{q} \to gg$ beitragen (q kennzeichnet ein Quark, g ein Gluon).

(b) Wenden Sie die aus der Vorlesung bekannten Feynmanregeln der QCD an, um die Amplitude $i\mathcal{M}$ aufzuschreiben.

Aufgabe 3: Darstellungen der $SU(N)$ Lie Algebra. (8 Punkte)

Die Generatoren T_a einer Lie-Gruppe sind hermitische Operatoren. Sie sind die Erzeugenden der infinitesimalen Gruppentransformationen. Der Kommutator von Generatoren ist daher eine lineare Kombination von Generatoren und kann geschrieben werden als:

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c, \tag{7}$$

wobei f^{abc} die Strukturkonstanten sind. Der Vektorraum aufgespannt durch die Generatoren und die Kommutator-Beziehung (7) wird als Lie-Algebra bezeichnet.

(a) Alle einfachen Lie-Algebren haben eine adjungierte Darstellung. Die entsprechenden Generatoren werden durch die Strukturkonstanten wie folgt dargestellt

$$(t^b)_{ac} = i f^{abc}. \tag{8}$$

Zeigen Sie, dass diese Generatoren die folgende Lie Algebra erfüllen

$$([t^a, t^c])_b = i f^{acd} (t^d)_{be}. \tag{9}$$

Beachten Sie, dass die Strukturkonstanten antisymmetrisch sind, $f^{abc} = -f^{bac}$. Sie können auch die folgende Relation verwenden

$$f^{ade} f^{bcd} + f^{bde} f^{cad} + f^{cde} f^{abd} = 0. \tag{10}$$

(b) Die quadratische Casimir-Invariante einer Darstellung R ist definiert als

$$C(R)\mathbf{1} = \sum_a (t^a t^a), \tag{11}$$

wobei t^A die Generatoren der Eichgruppe in der Darstellung R bezeichnen. Der Dynkin-Index einer Darstellung R ist gegeben durch:

$$S(R)\delta^{ab} = \mathrm{Tr}(t^a t^b). \tag{12}$$

Zeigen Sie, dass für die adjunguierte Darstellung von $SU(3)$ gilt

$$C(\mathrm{Adj}) = S(\mathrm{Adj}) = 3, \tag{13}$$

unter Beachtung, dass die $SU(3)$ Strukturkonstanten durch

$$f^{123} = 1,\ f^{147} = -f^{156} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = -f^{367} = \frac{1}{2},\ f^{458} = f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tag{14}$$

gegeben sind (alle anderen Strukturkonstanten verschwinden).

(c) Die fundamentale Darstellung der $SU(2)$ ist definiert durch $t^A = \frac{1}{2}\sigma^A$ mit

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Zeigen Sie unter Verwendung der Definition von Aufgabenteil (b), dass

$$S(F) = \frac{1}{2}, \quad C(F) = \frac{3}{4}. \tag{16}$$