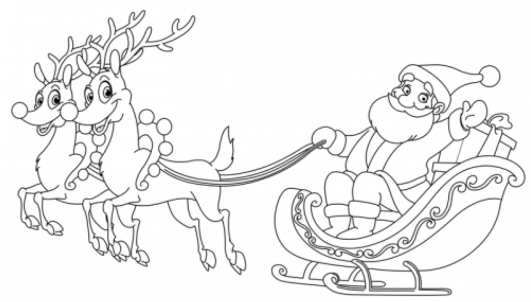
8. Übungsblatt zur Vorlesung **WS 2015/2016**
Einführung in die Elementarteilchentheorie **Prof. H. Päs**
Abgabe: bis Fr. 08. Januar 2016 10:00 Uhr

Frohe Weihnachten und einen Guten Rutsch!



Aufgabe 1: Young-Tableaux **(0 Punkte)**

Lesen Sie das Miniskript zu Yang-Tableaux auf der Vorlesungshomepage.

Aufgabe 2: Isospin Rotation für Quarks und Antiquarks **(5 Punkte)**

Die up und down Quarkfelder können als $SU(2)$-Isospin Dublet $q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ geschrieben werden. Im folgenden wollen wir die Transformation eines solchen Dublets unter einer Rotation U im Isospoinraum untersuchen. Die Rotation ist gegeben durch :

$$U = \exp\left(i\vec{\phi}\vec{\tau}\right) \tag{1}$$

Mit den Winkeln ϕ_i und den Generatoren der Drehung $\tau_i = \sigma_i$, wobei die σ_i die Pauli Matrizen sind.

(a) Berechnen Sie U und $q' = Uq$ für die Rotation um $\vec{\phi} = (0, \pi, 0)^T$.

(b) Wie sieht das Dublet für Antiquarks aus? Um die Frage zu beantworten, wählen sie den Ansatz $\overline{q} = \begin{pmatrix} \overline{d} \\ \overline{u} \end{pmatrix}$ und führen Sie erneut die Rotation um $\vec{\phi} = (0, \pi, 0)^T$ aus. Vergleichen Sie q' und $\overline{q'}$. Was lernen Sie daraus?

Aufgabe 3: Flavour $SU(3)$ Quark Modell **(8 Punkte)**

In diesem Ansatz sind Hadronen Bindungszustände aus Quarks. Eine Wellenfunktion für Hadronen besteht im Allgeimeinen aus einer Linearkombination von Produkten einzelner Faktoren für die einzelnen Freiheitsgrade: Spin, Flavour und Color.

$$\Psi = \sum \Psi(\text{Spin})\,\Psi(\text{Flavour})\,\Psi(\text{Color}) \tag{2}$$

Also kann jede Einzelne der Funktionen unabhängig voneinander im dazugehörigen Raum betrachtet werden, solange die resultierende Wellenfunktuionen die Symmetrien des Systems erfüllt.

(a) Berechnen Sie unter Verwendung von Young Diagrammen die Aufspaltung des Produkts der Repräsentationen $2 \otimes 2$ in $SU(2)$ und $3 \otimes 3 \otimes 3$ in $SU(3)$.

(b) Erklären Sie, unter Verwendung des Pauli Prinzips und der Tatsache, dass physikalische Zustände farblos sind, welches Produkt aus Repräsentationen (Young-Tableaux) aus $SU(3)_F \otimes SU(2)_S \otimes SU(3)_C$ mit welchen Baryonen aus den Abbildung 1 in Verbindung stehen.

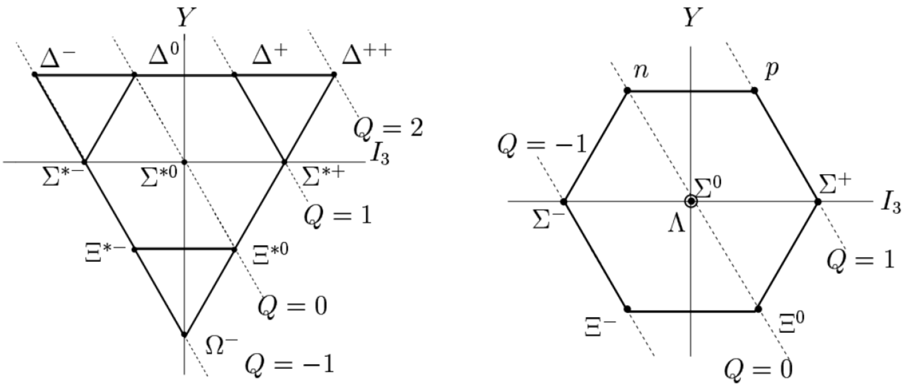


Abbildung 1: **links:** Baryon Decuplet und seine Flavor Quantenzahlen (die Dreiecksseiten sind 3 Einheiten lang), **rechts:** Baryon Octet und seine Flavor Quantenzahlen (die Sechseckseiten sind eine Einheit lang)

Aufgabe 4: Quarks und Leptonen in $SU(5)$ GUTs **(7 Punkte)**

In Großen Vereinheitlichten Theorien (= **G**rand **U**nified **T**heories) wird die Symmetriegruppe des Standardmodells der Teichenphysik

$$SU(3)_C \otimes SU(2) \otimes U(1) \tag{3}$$

als Untergruppe einer fundamentaleren Gruppe, wie zum Beispiel der $SU(5)$, verstanden.
Zeigen Sie, dass die Multipletts ein Triplet bzw. ein Triplet und zwei Antitriplets bezüg-

$$\mathbf{5} = \square \quad \text{und} \quad \overline{\mathbf{10}} = \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

lich der Gruppe $SU(3)_C$ bilden, welche die Quarks der ersten Generation u_R, d_R oder $\overline{u}_R, \overline{d}_R$ darstellen und abgesehen davon nur Singlets der $SU(3)_C$ enthalten, die als e_R, ν_R oder $\overline{e}_R, \overline{\nu}_R$ interpretiert werden können.
Hinweis: Beachten Sie, dass Teilchen, die aus einem gemeinsamen $SU(5)$ Multiplet stammen, auch die gleiche Chiralität besitzen.

Aufgabe 5: $U(N)$ **und** $SU(N)$ **(+5 extra Punkte)**

In dieser Aufgabe soll die unitäre Gruppe etwas näher untersucht werden. Wir betrachten die Menge der unitären Matrizen $U(n) := \{U \in GL(n,\mathbb{C}) | UU^\dagger = I_n\}$. Die spezielle unitäre Gruppe ist die echte Untergruppe derjenigen Elemente aus U(n), für die gilt: $det(U) = 1$.

(a) Zeigen Sie zuerst, dass $U(n)$ eine Gruppe ist. Dass $GL(n,\mathbb{C})$, die Automorphismenmenge auf $\mathbb{C}$ (d.h. die Menge der invertierbaren komplexen $n \times n$-Matrizen), eine Gruppe ist, kann dabei als bekannt angenommen werden.

(b) Wie viele unabhängige (reelle) Parameter haben die Elemente von $U(n)$? Wie viele haben Elemente aus $SU(n)$? Begründen Sie ihr Ergebnis.

(c) Zeigen Sie, dass sich die $U(n)$ in die spezielle orthogonale Gruppe $SO(2n) := \{A \in GL(2n,\mathbb{R}) | AA^T = I_{2n}\}$ einbetten lässt.

Hinweis: Finden Sie in Teil (c) eine injektive lineare Abbildung, die komplexe $n \times n$-Matrizen als reelle $2n \times 2n$-Matrizen geeigneter Form schreibt. Zeigen Sie, dass das Bild von $U(n)$ unter dieser Abbildung in $SO(2n)$ liegt.
Möglicherweise hilfreich ist der folgende Zusammenhang für Determinanten von Blockmatrizen:

$$det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = det(A + iB)det(A - iB). \tag{4}$$