7. Übungsblatt zur Vorlesung **WS 2015/2016**
Einführung in die Elementarteilchentheorie **Prof. H. Päs**
Abgabe: bis Fr. 18. Dezember 2015 10:00 Uhr

Aufgabe 1: Yukawa-Wechselwirkung **(7 Punkte)**

Im Folgenden sollen die Eigenschaften der Yukawa-Wechselwirkung, übertragen durch den Austausch eines skalaren Feldes, untersucht werden.

(a) Geben Sie die Amplitude für den t-Kanal der Streuung identischer Fermionen $\psi_s \psi_r \to \psi_{s'} \psi_{r'}$ im Rahmen der Yukawa-Theorie an, wobei s, s', r und r' die Spins der Teilchen bezeichnen. Verwenden Sie dafür die bekannten Feynman-Regeln aus der Vorlesung für Fermionen und skalare Felder. Der Propagator eines skalaren Feldes mit der Masse M und dem Impulsübertrag q ist durch

$$\frac{i}{q^2 - M^2 + i\epsilon} \tag{1}$$

gegeben. Die Ausdrücke der Spinoren u und v lassen sich im nicht-relativistischem Grenzfall ($m \gg |\vec{p}|$) weiter vereinfachen. Vergleichen Sie anschließend Ihr Resultat mit dem Ergebnis aus Bornscher Näherung

$$\mathcal{M} = -\tilde{V}(\vec{q}) 2m\delta_{ss'} 2m\delta_{rr'}, \tag{2}$$

um daraus das Yukawa-Potential im Impulsraum $\tilde{V}$ abzuleiten.

(b) Berechnen Sie nun die inverse Fouriertransformation von $\tilde{V}$, um einen Ausdruck für das Potential V im Ortsraum zu erhalten. Identifizieren Sie die Reichweite des Potentials und berechnen Sie sie explizit für ein skalares Feld mit Masse $M \approx 125\,\text{GeV}$.

(c) Zeigen Sie, dass das Yukawa-Potential stets anziehend ist, indem Sie die t-Kanal Amplituden der Prozesse $\psi_s \overline{\psi}_r \to \psi_{s'} \overline{\psi}_{r'}$ und $\overline{\psi}_s \overline{\psi}_r \to \overline{\psi}_{s'} \overline{\psi}_{r'}$ betrachten und mit $\psi_s \psi_r \to \psi_{s'} \psi_{r'}$ vergleichen.

Aufgabe 2: Leptontensoren in $e^+ e^- \to \mu^+ \mu^-$ **(7 Punkte)**

Im Folgenden soll der Prozess $e^-(p) e^+(p') \to \mu^-(k) \mu^+(k')$ im Rahmen der QED betrachtet werden.

(a) Zeichnen Sie alle zusammenhängenden Feynmandiagramme der QED-Prozesse, die in niedrigster, nicht-verschwindender Ordnung zum Wirkungsquerschnitt beitragen und geben Sie mit Hilfe der Feynmanregeln das zugehörige Matrixelement $\mathcal{M} = \langle f | T | i \rangle$ an.

(b) Das spingemittelte Amplitudenquadrat für unpolarisierte Teilchen kann als Produkt zweier Leptontensoren $L^{\eta\nu}$ geschrieben werden, wobei η und ν Lorentz-Indizes bezeichnen. Zeigen Sie, dass gilt

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4} \sum\nolimits_{\text{Spins}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4s^2} L^{\eta\nu(e)} L^{(\mu)}_{\eta\nu} \qquad \text{mit} \quad s = (p + p')^2 . \tag{3}$$

(c) Werten Sie den Ausdruck für $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ so weit wie möglich aus, indem Sie zur Vereinfachung die Kollision im Schwerpunktsystem der Elektronen entlang der z-Achse betrachten. Nutzen Sie die Spurtheoreme von Blatt 6 und nehmen Sie weiterhin an, dass die Elektronmasse m_e vernachlässigbar ist.

Leiten Sie damit einen Ausdruck der Form $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Omega}\sigma(s, m_\mu, E, \theta)$ für den differentiellen Wirkungsquerschnitt her. E ist hier die Energie des Elektrons und θ der Streuwinkel im Schwerpunktsystem.

Aufgabe 3: Crossing-Symmetrie in der QED **(6 Punkte)**

Betrachten Sie $e^+e^- \to \gamma\gamma$ und $e^-\gamma \to e^-\gamma$ im Rahmen der QED.

(a) Zeichnen Sie die zusammenhängenden Feynman-Diagramme der niedrigsten Ordnung für $e^+e^- \to \gamma\gamma$ sowie $e^-\gamma \to e^-\gamma$.

(b) Verwenden Sie die Crossing-Symmetrie um $\overline{|\mathcal{M}|^2}(e^+e^- \to \gamma\gamma)$ aus dem Amplitudenquadrat

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}(e^-\gamma \to e^-\gamma) = 2e^4\left[\frac{p\cdot k'}{p\cdot k} + \frac{p\cdot k}{p\cdot k'} + 2m^2\left(\frac{1}{p\cdot k} - \frac{1}{p\cdot k'}\right) + m^4\left(\frac{1}{p\cdot k} - \frac{1}{p\cdot k'}\right)^2\right]$$

zu konstruieren. Berechnen Sie dann den Wirkungsquerschnitt $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$, indem Sie wie in Aufgabe 2 in das Schwerpunktsystem der kollidierenden Elektronen gehen.