6. Übungsblatt zur Vorlesung **WS 2015/2016**
Einführung in die Elementarteilchentheorie **Prof. H. Päs**
Abgabe: bis Fr. 11. Dezember 2015 10:00 Uhr

Aufgabe 1: $e^+(p_1)e^-(p_2) \to e^+(k_1)e^-(k_2)$, Helizitätsanalyse **(8 Punkte)**
Zur Vorbereitung auf die Rechnungen eines kompletten Wirkungsquerschnittes, berechnen wir zunächst das Amplitudenquadrat einer $2 \to 2$ Streuung. Dazu betrachten wir die Elektron-Positron Streuung $e^+(p_1)e^-(p_2) \to e^+(k_1)e^-(k_2)$ im Rahmen der QED. Zur Vereinfachung beachten wir nur den s-Kanal der Elektron-Positron Streuung.
Ziel dieser Aufgabe ist es, die Winkelverteilung des differentiellen QED-Wirkungsquerschnitts für *masselose* Fermionen $d\sigma/d\Omega \propto 1+\cos^2\Theta$ zu erklären. Dabei ist Θ der Winkel im Schwerpunktsystem mit $s = (p_1+p_2)^2$ zwischen eingehenden e^- und ausgehenden e^- (und zwischen eingehenden e^+ und ausgehenden e^+)

a) Zeichnen Sie die/das Feynmandiagramm(e) aller QED-Prozesse, welche in Ordnung $O(\alpha)$ beitragen, sowie den Impulsfluss.

b) Geben Sie mit Hilfe der Feynmanregeln das Matrixelement $\mathscr{A} = \langle f|T|i\rangle$ in niedrigster nichtverschwindender Ordnung für *masselose* Teilchen mit *fester Helizität* an. Berechnen Sie

$$\overline{|\mathscr{A}|^2} = \frac{1}{4}\sum\nolimits_{\text{Spins}} |\mathscr{A}|^2. \qquad (1)$$

ohne die Vollständigkeitsrelation für die Spinoren auszunutzen. Wählen Sie dabei die Impulse p_1, p_2 entlang der z-Achse und setzen Sie jeweils die expliziten Spinoren sowie die Gamma-Matrizen in der chiralen Darstellung ein. (Den Myonvektorstrom finden Sie am Einfachsten durch Drehung). Führen Sie die Berechnung für alle Kombinationen der Helizitäten durch, d.h. für $e^-_{RH}e^+_{LH} \to e^-_{LH}e^+_{RH}$, $e^-_{RH}e^+_{LH} \to e^-_{RH}e^+_{LH}$ etc, wobei RH (LH) rechts(links)händige Teilchen bezeichnet. Summieren Sie die einzelnen Beiträge und zeigen Sie das $d\sigma/d\Omega \propto 1+\cos^2\Theta$ gilt.
Hinweise:

1. Begründen Sie zunächst, warum die Amplitude null ist wenn ein- und/oder auslaufende Teilchen untereinander dieselbe Helizität haben. Beachten Sie, dass ein rechtshändiger Spinor $v(p')$ einem linkshändigen Antiteilchen entspricht und umgekehrt.

2. Unter der Paritätstransformation P wird aus einem linkshändigen Teilchen ein rechtshändiges und umgekehrt. Nutzen Sie dies und die Invarianz der QED unter P um z.B. die Amplitude von $e^-_{LH}e^+_{RH} \to e^-_{RH}e^+_{LH}$ durch ihre P-Transformierte auszudrücken.

c) Die Teilamplituden haben alle charakteristische Minima und Maxima bei bestimmten Streuwinkeln. Wie kommen diese zustande? Denken Sie an die Helizitätserhaltung!

Aufgabe 2: Spinsummen und Spuren **(8 Punkte)**
Ein geboosteter Spinor lässt sich schreiben als

$$u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi^s \end{pmatrix}$$

mit $\sigma^\mu = (1, \vec{\sigma})$, $\overline{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma})$ und

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \overline{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Wurzel einer Matrix impliziert hierbei die Wurzel der Eigenwerte.

(a) Leiten Sie die Beziehung

$$\left(p \cdot \sigma\right)\left(p \cdot \overline{\sigma}\right) = p^2 = m^2$$

her.

(b) Leiten Sie die Vollständingkeitsrelation (auch Spinsumme genannt) für Fermionen

$$\sum_{s=1,2} u^s\left(p\right)\overline{u}^s\left(p\right) = \not{p} + m$$

her.

(c) Betrachten Sie noch einmal $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ für den s-Kanal von $e^+e^- \to e^+e^-$ mit allen Spinorindices. Verwenden Sie Spinsummen und die korrekten Spinorindices für die Matrizen $\left(\not{p} - m\right)$ und $\left(\not{p} + m\right)$ um die Entwicklung der Spur nachzuvollziehen.

(d) Berechnen Sie den absoluten Wirkungsquerschnitt für den oben genannten Prozess.

Aufgabe 3: Spurtechnologie und Identitäten für Dirac-Matrizen (4 Punkte)
Verwenden sie Antikommutatorrelationen und generelle Eigenschaften der Spur um die folgenden Identitäten zu beweisen.

(a) $\mathrm{tr}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu\right) = 4g_{\mu\nu}$.

(b) $\mathrm{tr}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\right) = 4\left(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\right)$.

(c) $\mathrm{tr}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_5\right) = -4\mathrm{i}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$.

(d) $\mathrm{tr}\left(\text{ungrade\# } \gamma\right) = 0$.