3. Übungsblatt zur Vorlesung **WS 2015/2016**
Einführung in die Elementarteilchentheorie **Prof. H. Päs**
Abgabe: bis Fr. 20. November 2015 10:00 Uhr

Aufgabe 1: Wie man ein Dirac-Feld *nicht* quantisiert **(10 Punkte)**
In der Vorlesung haben Sie die Anti-Vertauschungsrelationen für Fermionen in der 2. Quantisierung hergeleitet:

$$\{\psi_a(x), \psi_b^\dagger(y)\} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})\delta_{ab} \tag{1}$$

bei gleichen Zeiten $t = x_0 = y_0$ und mit den Spinorkomponenten a und b.

(a) Führen Sie zum Aufwärmen die kanonische Quantisierung eines skalaren Feldes durch. Starten Sie dafür mit der Lagrangedichte für ein Klein Gordon-Feld:

$$\mathscr{L}_{KG} = \frac{1}{2}\left[\left(\partial_\mu \phi(x)\right)\left(\partial^\mu \phi(x)\right) - m^2 \phi(x)^2\right] \tag{2}$$

Berechnen Sie das zu

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_p e^{-ipx} + a_p^\dagger e^{+ipx}\right) \tag{3}$$

konjugierte Feld $\pi(x)$ und bestätigen Sie die Vertauschungsrelation $\left[\phi(x), \pi(x)\right] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$ zu gleichen Zeiten $t = x_0 = y_0$ mit Hilfe der Vertauschungsrelation $\left[a_p, a_q^\dagger\right] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})$

(b) Gehen Sie nun im Gegensatz zur Vorlesung aber analog zu (a) davon aus, dass Fermionzustände symmetrisch sind. Berechnen Sie den Kommutator

$$[\psi_a(x), \psi_b^\dagger(y)] \quad \text{mit} \quad t = x_0 = y_0. \tag{4}$$

Verwenden Sie dafür die Fourier-Zerlegungen

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s [a_{p,s} u_s(p) e^{-ipx} + b_{p,s}^\dagger v_s(p) e^{ipx}], \tag{5}$$

$$\overline{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s [b_{p,s} \overline{v}_s(p) e^{-ipx} + a_{p,s}^\dagger \overline{u}_s(p) e^{ipx}]. \tag{6}$$

sowie

$$[a_{p,r}, a_{q,s}^\dagger] = [b_{p,r}, b_{q,s}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})\delta_{rs}. \tag{7}$$

Die Indizes p, q beschreiben Impulse der Fermionen und r, s ihre Spinzustände. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Relation (1). Folgern Sie, dass (5) und (6) nicht die korrekten Fourier-Zerlegungen sein können.

(c) Die zu (7) gehörenden Fourier-Entwicklungen der Felder ψ und $\overline{\psi}$ lauten:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s (a_{p,s} u_s(p) e^{-ipx} + b_{p,s} v_s(p) e^{ipx}), \tag{8}$$

$$\overline{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s (a_{p,s}^\dagger \overline{u}_s(p) e^{ipx} + b_{p,s}^\dagger \overline{v}_s(p) e^{-ipx}). \tag{9}$$

Verwenden Sie (8) und (9) um die Hamilton-Funktion

$$H = \int d^3x \, \mathcal{H} \tag{10}$$

aus der Lagrangedichte des freien Diracfeldes herzuleiten

$$\mathcal{L}_D = \overline{\psi}(x)(i\partial\!\!\!/ - m)\psi(x). \tag{11}$$

Auch hier stößt man auf ein Problem. Welches? Wie lässt sich dieses Problem unter der Annahme lösen, dass

$$\{b_{p,r}, b^\dagger_{q,s}\} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})\delta_{rs}? \tag{12}$$

Wie sehen dann die Fourier-Entwicklungen von ψ und $\overline{\psi}$ aus?

Hinweis: Die folgenden Relationen könnten für die Rechnung hilfreich sein:

$$(p\!\!\!/ - m)u(p) = 0 \qquad (p\!\!\!/ + m)v(p) = 0 \tag{13}$$

$$u^\dagger_r(p)u_s(p) = 2E_p\delta_{rs} \qquad v^\dagger_r(p)v_s(p) = 2E_p\delta_{rs} \tag{14}$$

$$\overline{u}_r(p)u_s(p) = 2m\delta_{rs} \qquad \overline{v}_r(p)v_s(p) = -2m\delta_{rs} \tag{15}$$

$$\overline{v}_r(p)u_s(p) = \overline{u}_r(p)v_s(p) = 0 \qquad v^\dagger_r(\vec{p})u_s(-\vec{p}) = u^\dagger_r(\vec{p})v_s(-\vec{p}) = 0 \tag{16}$$

Aufgabe 2: Der Teilchenzahloperator in Fock-Raum **(5 Punkte)**

Der Teilchenzahloperator in Fock-Raum ist definiert als

$$N = \int d^3p \, a^\dagger(p)a(p). \tag{17}$$

Zeigen Sie, dass

$$[N, a^\dagger(p)] = a^\dagger(p), \quad [N, a(p)] = -a(p) \tag{18}$$

unter der Annahme, dass

$$[a(p), a^\dagger(p')] = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}\,'). \tag{19}$$

Zeigen Sie weiter, dass Anwendung von N auf die Zustände

$$\begin{aligned} |p_1, p_2, \ldots p_n\rangle &\equiv a^\dagger(p_1)a^\dagger(p_2)\ldots a^\dagger(p_n)|0\rangle, \\ |p(n)\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger(p))^n|0\rangle \end{aligned} \tag{20}$$

die korrekte Teilchenzahl gibt.

Aufgabe 3: Bilinearen Kovarianten **(5 Punkte)**

(a) Es gibt 16 linear unabhängige 4×4 Matrizen Γ_a, die bilinearen Kovarianten

$$\begin{aligned} \mathrm{Skalar}: \Gamma_S &= 1, & \mathrm{Pseudo-Skalar}: \Gamma_P = \gamma_5, \\ \mathrm{Vector}: \Gamma^\mu_V &= \gamma^\mu, & \mathrm{Axial-Vector}: \Gamma^\mu_A = \gamma^\mu\gamma_5, \\ \mathrm{Tensor}: \Gamma^{\mu\nu}_T &= \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \end{aligned} \tag{21}$$

Weiterhin ist bekannt, daß die herkömmliche Adjungation in der relativistischen Quantenmechanik nicht hinreichend ist, um z.B. 4-er Ströme zu konstruieren. Man verwendet stattdessen die Dirac-Adjungierten. Diese sind für alle bilinearen Kovarianten gegeben durch

$$\bar{\Gamma}_a = \gamma^0\Gamma^\dagger_a\gamma^0. \tag{22}$$

Berechnen Sie die Dirac-Adjungierten für alle bilinearen Kovarianten.

(b) Zeigen Sie

$$\gamma_5^2 = 1, \quad \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\mu = -2\gamma_\nu, \quad \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma^\mu = 4 g_{\rho\sigma}. \tag{23}$$

(c) Man kann nun einen Projektor auf "linkshändige" Zustände P_L und auf "rechtshändige" Zustände P_R definieren

$$P_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5), \qquad P_R = \frac{1}{2}(1+\gamma_5), \tag{24}$$

wobei dann ein links- (rechts-)händiger Spinor geschrieben wird als $\psi_{L(R)} = P_{L(R)}\psi$.

- Zeigen Sie die Projektoreigenschaften der $P_{L(R)}$ explizit, d.h. berechnen Sie $P^2_{L(R)}$, $P_{L(R)}P_{R(L)}$, $P_L + P_R$.
- Zerlegen Sie die Größe $\bar{\psi}\psi$ nach Händigkeiten. Welche Terme sind von Null verschieden (Rechnung!)?
- Zeigen Sie, daß man eine "Vektor–Axial-Vektor" Kopplung $\bar{\psi}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi$ als "linkshändigen Strom" $\bar{\psi}_L\gamma_\mu\psi_L$ ausdrücken kann.
- Man spricht von sogenannten "guten Quantenzahlen", wenn der zur Quantenzahl assozierte Operator mit dem Hamilton-Operator des Systems kommutiert. Bestimmen Sie den Hamilton-Operator für die Dirac-Gleichung. Wann liefert γ_5 eine gute Quantenzahl?