$\boxed{\textbf{Young-Tableaux und } SU(n)}$

Einleitung

Young-Tableaux liefern eine einfache Methode zur Zerlegung von Produkten von $SU(n)$-Darstellungen in Summen irreduzibler Darstellungen. Man erhält Dimension und Symmetrieeigenschaften dieser sogenannten Clebsch-Gordan-Reihen, aber nicht die Clebsch-Gordan-Koeffizienten.
Jedes Kästchen entspricht einem Teilchen. In das Kästchen geschriebene Zahlen bezeichnen den Zustand des Teilchens. Die Zustandsnummern dürfen von rechts nach links nicht abnehmen und müssen von oben nach unten zunehmen (keine Mehrfachnennung wg. Antisymmetrie). Die Anzahl der Möglichkeiten, Zustände auf die Teilchen zu verteilen, entspricht der Dimension der Darstellung (der Entartung des Multipletts). Produkte von Darstellungen entsprechen aus Einteilchensystemen aufgebauten Vielteilchensystemen (z.B. Addition von Drehimpulsen).

Young-Tableaux und $SU(2)$

Ein einzelnes Elektron bildet ein Dublett unter der $SU(2)$-Spingruppe, d.h. es transformiert sich unter der Fundamentalen Darstellung und höhere Spinzustände können durch Kopplung mehrerer Elektronen erzeugt werden.
Die zwei Spinzustände lassen sich als

$$2 = \{\ |+\rangle \equiv \boxed{1}, \quad |-\rangle \equiv \boxed{2}\ \}. \tag{1}$$

darstellen.
Die symmetrischen Zwei-Teilchenzustände (das Triplett) sind dann

$$3 = \left\{ |++\rangle \equiv \boxed{1}\boxed{1}, \quad |--\rangle \equiv \boxed{2}\boxed{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}[\,|+-\rangle \;+\; |-+\rangle\,] \equiv \boxed{1}\boxed{2} \right\}. \tag{2}$$

Der anti-symmetrische Zustand (das Singulett) ist:

$$1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}[\,|+-\rangle \;-\; |-+\rangle\,] \equiv \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \right\}. \tag{3}$$

Die Zerlegung des Tensorprodukts

$$\begin{aligned} \square \otimes \square &= \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \oplus \square\square \\ 2 \otimes 2 &= 1 \oplus 3 \end{aligned} \tag{4}$$

ergibt die Darstellungen des gekoppelten Systems.
Im Allgemeinen werden n-Teilchen-Zustände durch n Kästchen beschrieben. Diese Zustände können gemischte Symmetrie, und damit Zeilen mit Länge entsprechend der Anzahl der symmetrisch vertauschenden und Spalten mit Länge entsprechend der Anzahl der anti-symmetrisch vertauschenden Teilchen haben.

Das Singulett ist immer ein vollständig anti-symmtrischer Zustand und damit eine Spalte der Länge n. Solche Spalten tragen zur Dimension des Darstellung nicht bei und können bei der Dimensionsbestimmung weggelassen werden. Die Kästchenzahl entspricht dann aber nicht mehr der Teilchenzahl.

Verallgemeinerung auf $SU(n)$

Quarks mit drei möglichen Farbfreiheitsgraden werden als Triplett (Fundamentaldarstellung) unter der $SU(3)$ beschrieben. Jetzt kann jedes Kästchen (Teilchen) mit den 3 Zuständen $\{1, 2, 3\}$ belegt werden. Das analoge Beispiel zur 2-Spin-1/2-Kopplung ist dann die Zerlegung des Tensorprodukts zweier Quarks:

$$\begin{aligned} \square \otimes \square &= \begin{smallmatrix}\square\\ \square\end{smallmatrix} \oplus \square\square \\ 3 \otimes 3 &= 6 \oplus 3. \end{aligned} \tag{5}$$

Im allgemeinen Fall der $SU(n)$ haben die Teilchen die möglichen Zustände $\{1, 2, ..., n\}$.

$SU(n-k)$ Untergruppen der $SU(n)$

Ein $SU(n)$-Multiplett enthält mehrere Multipletts der Untergruppen $SU(n-k)$, z.B. enthalten die $SU(3)$-Flavor-Multipletts Multipletts der $SU(2)$-Isospin-Untergruppe. Deren Dimension betimmt sich wie folgt:
In den $SU(n-k)$-Untergruppen der $SU(n)$ macht die Belegung eines Teilchens mit Zustandszahlen größer als $n-k$ keinen Sinn. Die entsprechenden Kästchen können dann weggelassen werden, und die Rest-Young-Tableaux bestimmen die Dimension der Multipletts der $SU(n-k)$.
Als Beispiel nehmen wir das Oktett der SU(3) (siehe Abb. 1): Innerhalb der SU(2) macht die Belegung mit einer drei keinen Sinn, deswegen gruppieren wir die Tableaux in Gruppen, die Dreier an derselben Stelle haben. Die Dreier können dann weggelassen werden. Das Ergebnis ist:

$$SU(3) \to SU(2) : 8 \to 1 \oplus 2 \oplus 2 \oplus 3. \tag{6}$$

Regeln zur Bestimmung (Ausreduktion) des Tensorprodukts zweier Multipletts

Zeichne die Schemata (Tableaux) der zu multiplizierenden Darstellungen, wobei jedes Kästchen des zweiten Schemas mit seiner Zeilennummer gekennzeichnet wird. Füge dann dem ersten Schema sämtliche Kästchen des zweiten Schemas an, beachte dabei aber, dass die resultierenden Schemata die folgenden Regeln erfüllen:

- Jedes Schema muss zulässig sein, d.h. keine Zeile darf länger als die über ihr liegende sein.

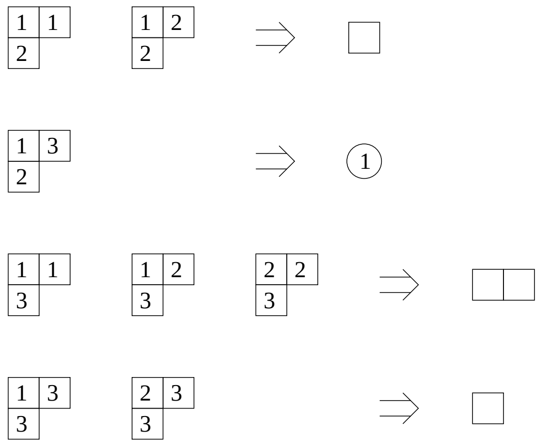

Abbildung 1: *Dimension der $SU(2)$-Multipletts im $SU(3)$-Oktett.*

- Keine Spalte darf mehr als n Kästchen enthalten.
- Innerhalb einer Zeile dürfen die Zeilennummern in den vom zweiten Schema stammenden Kästchen von links nach rechts nicht abnehmen.
- Innerhalb einer Spalte müssen die Zeilennummern von oben nach unten zunehmen.
- Längs eines Pfads von rechts nach links in jeder Zeile und von oben nach unten darf an jedem Punkt die Zeilennummer i aus dem zweiten Schema nicht öfter vorkommen als die Zeilennummer $i-1$ (siehe Abb. 2). Ein Beispiel findet sich in Abb. 3.

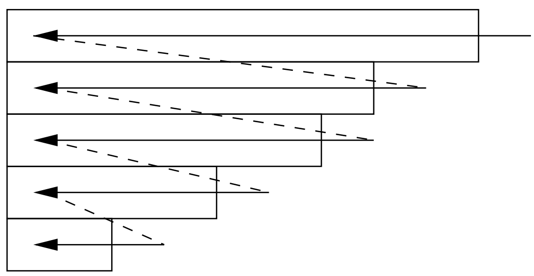

Abbildung 2: *Pfad, längs dem die Zahl i nicht öfter vorkommen darf als $i-1$.*

Bei der Multiplikation von mehr als zwei Young-Tableaux können die Produkte sukzessiv eins nach dem Anderen gebildet werden, wobei auch mehrfach vorkommende Multipletts berücksichtigt werden müssen, um die Dimension des Zustandsraums zu erhalten.

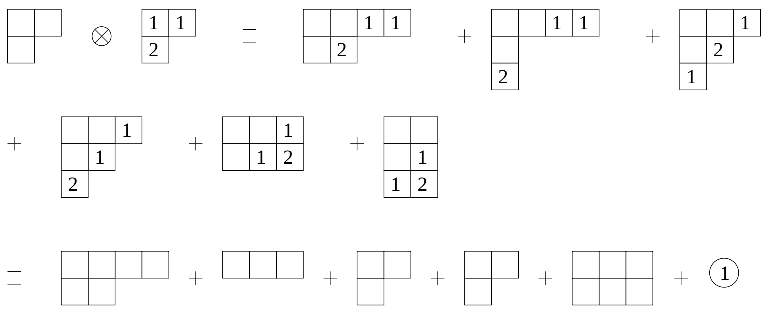

Abbildung 3: *Tensorprodukt zweier Oktetts in der SU(3). Im ersten Schritt wurden die Kästchen des zweiten Schemas den Regeln gemäss dem ersten Schema angefügt. Im zweiten Schritt wurde die Singulett-Spalte mit drei Kästchen weggelassen.*

Dimensionsregel (Hakenregel)

Die Hakenregel liefert eine zeitsparende Alternative für größere n und kompliziertere Young-Tableaux zur oben diskutierten Bestimmung der Dimension einer Darstellung mittels Abzählen der Möglichkeiten, Zustände auf Teilchen zu verteilen.
Nach der Hakenregel ergibt sich die Dimension d eines Young-Schemas wie folgt als Verhältnis zweier Produkte:

$$d = \Pi_i z_i / \Pi_i h_i. \tag{7}$$

Hierbei gilt (siehe Abb. 4):

- z_i sind die Zahlen, die sich ergeben, wenn man in die Kästchen des YT auf der Diagonale n, direkt über/unter der Diagonale $n \pm 1$, zwei Kästchen über/unter der Diagonale $n \pm 2$, usw. schreibt. sind
- h_i sind die Zahl der Kästchen, durch die ein Haken verläuft. Die Haken werden konstruiert, indem von jedem Kästchen aus nach rechts und nach unten eine gerade Linie gezogen wird.

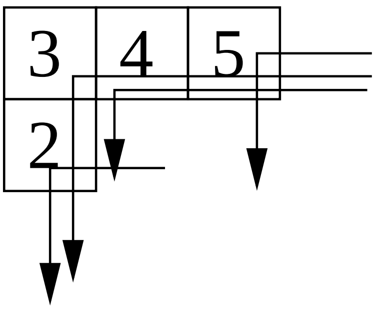

Abbildung 4: *Dimension eines YT in SU(3) via Hakenregel. Es ergibt sich* $d = 2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5/4{\cdot}2{\cdot}1{\cdot}1 = 15$.