11. Übungsblatt zur Vorlesung **SS 2016**
Theoretische Physik II **Prof. H. Päs**
Abgabe: bis Mi. 06. Juli 2016 16:00 Uhr

Aufgabe 1: Drehimpulsoperator **(10 Punkte)**

(a) Zeigen Sie die Kommutatorrelationen

$$[L_z, x] = i\hbar y; \quad [L_z, y] = -i\hbar x; \quad [L_z, z] = 0\,, \tag{1}$$

sowie

$$[L_z, p_x] = i\hbar p_y; \quad [L_z, p_y] = -i\hbar p_x; \quad [L_z, p_z] = 0\,. \tag{2}$$

Verwenden Sie hierfür die bekannte kanonische Vertauschungsrelation für Ort und Impuls.

(b) Zeigen Sie mithilfe der Ergebnisse aus (a) den Ausdruck

$$[L_z, L_x] = i\hbar L_y \tag{3}$$

direkt. Verwenden Sie hierfür explizit die Komponenten des Drehimpulses

$$L_x = yp_z - zp_y, \quad L_y = zp_x - xp_z, \quad L_z = xp_y - yp_x\,.$$

(c) Berechnen Sie die Kommutatoren $[L_z, r^2]$ sowie $[L_z, p^2]$.

(d) Zeigen Sie, dass der Hamilton-Operator H mit allen drei Komponenten des Drehimpulsoperators L kommutiert, wenn das Potential V ausschließlich von r abhängt, also

$$[H, L_i] = 0; \quad \text{mit} \quad H = \frac{p^2}{2m} + V(r)$$

Aufgabe 2: Noch mehr Drehimpuls **(10 Punkte)**

(a) Zeigen Sie für den Drehimpuls $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$ die Relation $[\vec{L}^2, L_i] = 0$, $i = x, y, z$.

(b) Ein Teilchen habe Spin $\vec{S}$ und Bahndrehimpuls $\vec{L}$. Warum gilt $[\vec{S}, \vec{L}] = 0$?
$Hinweis: Eine\ Rechnung\ wird\ nicht\ gebraucht.$

(c) Es sei $L_\pm \equiv L_x \pm iL_y$. Es gilt $[L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm$. Weiterhin sei $|\Psi_{lm}\rangle$ ein normierter Eigenzustand zu den Operatoren $\vec{L}^2$ und L_z mit den Eigenwerten $\hbar^2 l(l+1)$ und $\hbar m$. Zeigen Sie

$$L_z(L_\pm |\Psi_{lm}\rangle) = \hbar(m \pm 1)L_\pm |\Psi_{lm}\rangle$$

und berechnen Sie die Norm des Zustands $L_\pm |\Psi_{lm}\rangle$.

(d) Zeigen Sie, dass für die Eigenwerte gilt:

$$l(l+1) - m(m \pm 1) \geq 0$$

und geben sie den daraus folgenden Wertebereich für die Eigenwerte der z-Komponente des Drehimpulses L_z an.