10. Übungsblatt zur Vorlesung **SS 2016**
Theoretische Physik II **Prof. H. Päs**
Abgabe: bis Mi. 29. Juni 2016, 16:00 Uhr

Aufgabe 1: Der harmonische Oszillator **(15 Punkte)**

Der Hamiltonoperator eines quantenmechanischen harmonischen Oszillators ist gegeben durch:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right). \tag{1}$$

Dabei sind

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}}\hat{p}\right), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}}\hat{p}\right) \quad \text{und} \quad \hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} \tag{2}$$

die Ab- und Aufsteigeoperatoren sowie der Anzahloperator, wobei $\hat{a}\,|\Psi_n\rangle = \sqrt{n}\,|\Psi_{n-1}\rangle$ und $\hat{a}^\dagger\,|\Psi_n\rangle = \sqrt{n+1}\,|\Psi_{n+1}\rangle$ gilt. Des Weiteren ist die Wellenfunktion des Grundzustands $|\Psi_0\rangle$ gegeben durch:

$$\Psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}. \tag{3}$$

Für die weitere Rechnung setzen Sie $\hbar = \omega = m = 1$.

a) Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Kommutatorrelationen:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i, \quad \left[\hat{x}, \hat{a}^\dagger\right] = [\hat{a}, \hat{x}] = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \left[\hat{a}^\dagger, \hat{p}\right] = [\hat{a}, \hat{p}] = \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad \left[\hat{N}, \hat{a}^\dagger\right] = \hat{a}^\dagger, \quad \left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1.$$

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte des Anzahloperators.

c) Aus dem Grundzustand $|\Psi_0\rangle$ kann durch n-faches anwenden des Aufsteigeoperators $\hat{a}^\dagger$ der Zustand $|\Psi_n\rangle$ konstruiert werden, $|\Psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}^\dagger\right)^n |\Psi_0\rangle$.
Zeigen Sie mit Hilfe der Kommutatorrelationen aus a), dass $\langle\Psi_k|\Psi_n\rangle = \delta_{kn}$ gilt, d.h. die $|\Psi_n\rangle$ ein Orthonormalsystem bilden. Dabei darf angenommen werden, dass $|\Psi_0\rangle$ normiert ist.

Hinweis: $\hat{a}\,|\Psi_0\rangle = 0$

d) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle\Psi_n|\,\hat{x}\,|\Psi_n\rangle$ und $\langle\Psi_n|\,\hat{p}\,|\Psi_n\rangle$. Dazu ist keine lange Rechnung notwendig!

e) Bestimmen Sie nun die Erwartungswerte $\langle\Psi_n|\,\hat{x}^2\,|\Psi_n\rangle$ und $\langle\Psi_n|\,\hat{p}^2\,|\Psi_n\rangle$. Was ist der wesentliche Unterschied zum klassischen harmonischen Oszillator? Hinweis: Es muss in dieser Aufgabe kein einziges Integral explizit gelöst werden.

Aufgabe 2: $\frac{1}{2}$ Harmonischer Oszillator **(5 Punkte)**

Ein quantenmechanisches Teilchen der Masse m bewege sich in einem eindimensionalen Potential der Form

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x \leq 0 \\ \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 & x > 0 \end{cases}. \tag{4}$$

a) Wie unterscheiden sich die Lösungen zu denen des gewöhnlichen harmonischen Oszillators (Aufgabe 1)? Welche Energieeigenwerte sind möglich?

b) Berechnen Sie den Ortserwartungswert für den Eigenzustand niedrigster Energie. Verwenden Sie dafür die Gleichungen (3) und (2)