7. Übungsblatt zur Vorlesung **SS 2016**
Theoretische Physik II **Prof. H. Päs**
Abgabe: bis Mi. 08. Juni 2016 16:00 Uhr

Aufgabe 1: Lineare Operatoren **(3 Punkte)**

Die Operatoren $\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{D}$ wirken wie folgt auf eine eindimensionale Funktion $\psi(x)$:

$$\boldsymbol{X}\psi(x) = x\psi(x), \tag{1}$$

$$\boldsymbol{D}\psi(x) = \frac{d\psi(x)}{dx}. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{D}$ lineare Operatoren sind.

Aufgabe 2: Unschärferelation **(9 Punkte)**

Betrachten Sie folgendes Wellenpaket:

$$\psi(x) = Ne^{-ik_0 x}e^{-x^2/r^2} \text{ mit } r, N > 0 \text{ und } k_0, N \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

(a) Bestimmen Sie N so, dass $\psi(x)$ normiert ist.

(b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle \boldsymbol{X} \rangle$, $\langle \boldsymbol{X}^2 \rangle$, $\langle \boldsymbol{P} \rangle$ und $\langle \boldsymbol{P}^2 \rangle$.

(c) Zeigen Sie, dass die Heisenberg‘sche Unschärferelation erfüllt ist.

Hinweise:

$$\int_{\infty}^{\infty} dx e^{-2x^2/r^2} = r\sqrt{\pi/2}, \tag{4}$$

$$\int_{\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-2x^2/r^2} = \frac{r^3}{2}\sqrt{\pi/8}. \tag{5}$$

Aufgabe 3: Wellenfunktionen **(8 Punkte)**

Betrachten Sie die eindimensionalen, normierten Wellenfunktionen $\psi_0(x)$ und $\psi_1(x)$ mit den folgenden Eigenschafen:

$$\psi_0(-x) = \psi_0(x) = \psi_0^*(x), \tag{6}$$

$$\psi_1(x) = N\frac{d\psi_0(x)}{dx}. \tag{7}$$

Zudem sei die Linearkombination ψ definiert als:

$$\psi(x) = c_0\psi_0(x) + c_1\psi_1(x). \tag{8}$$

Dabei ist $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$. Ferner können Sie N, c_0 und c_1 als bekannt ansetzen.

(a) Zeigen Sie, dass $\psi_0(x)$ und $\psi_1(x)$ orthogonal zueinander sind und dass $\psi(x)$ normiert ist.

(b) Berechnen Sie die Erwartungswerte der Operatoren $\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{P}$ für die Zustände $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ und $\psi(x)$.

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert der kinetischen Energie $\boldsymbol{T}$ für den Zustand $\psi_0(x)$ und zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

$$\langle\psi_0(x)|\boldsymbol{T}^2|\psi_0(x)\rangle = \langle\psi_0(x)|\boldsymbol{T}|\psi_0(x)\rangle \cdot \langle\psi_1(x)|\boldsymbol{T}|\psi_1(x)\rangle. \tag{9}$$

Des Weiteren soll mittels der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gezeigt werden, dass gilt:

$$\langle\psi_1(x)|\boldsymbol{T}|\psi_1(x)\rangle \geq \langle\psi(x)|\boldsymbol{T}|\psi(x)\rangle \geq \langle\psi_0(x)|\boldsymbol{T}|\psi_0(x)\rangle. \tag{10}$$

(d) Zeigen Sie:

$$\langle\psi_0(x)|\boldsymbol{X}^2|\psi_0(x)\rangle \cdot \langle\psi_1(x)|\boldsymbol{P}^2|\psi_1(x)\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}. \tag{11}$$