6. Übungsblatt zur Vorlesung **SS 2016**
Theoretische Physik II **Prof. H. Päs**
Abgabe: bis Mi. 25. May 2016, 16:00 Uhr

Aufgabe 1: reduzierte Dichtematrix 1 **(5 Punkte)**
Berechnen Sie die reduzierten Dichtematrizen ρ_A und ρ_B der folgenden Zustände:

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle\big) \tag{1}$$

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{5}\big(3\,|\uparrow\uparrow\rangle + 4\,|\uparrow\downarrow\rangle\big) \tag{2}$$

Das System A stellt dabei den ersten und das System B den zweiten Spin dar. Handelt es sich um reine oder um gemischte Zustände?
Falls es sich um einen reinen Zustand handelt, finden Sie den entsprechenden Produktzustand der Form $|\Psi\rangle = \left(\sum_i C_i \left|\Psi_{A_i}\right\rangle\right) \otimes \left(\sum_j C_j \left|\Psi_{B_j}\right\rangle\right)$.

Aufgabe 2: Korrelation **(5 Punkte)**
Zeigen Sie die Korrelation $C(A,B) = \langle O_A \otimes O_B\rangle - \langle O_A\rangle \langle O_B\rangle$ zweier beliebiger Observablen für einen Produktzustand $|\Psi\rangle = \left(\sum_i C_i \left|\Psi_{A_i}\right\rangle\right) \otimes \left(\sum_j C_j \left|\Psi_{B_j}\right\rangle\right)$ verschwindet. Dabei ist O_A eine Observable des Systems A mit der Basis $\left|\Psi_{A_i}\right\rangle$ und O_B eine Observable des Systems B mit der Basis $\left|\Psi_{B_i}\right\rangle$.

Aufgabe 3: reduzierte Dichtematrix 2 **(10 Punkte)**
In dieser Aufgabe sollen einige Eigenschaften der Dichtematrix eines zusammengesetzten Systems betrachtet werden. Die Dichtematrix ρ sei dabei gegeben durch $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$, wobei der Zustand $|\Psi\rangle$ als

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j} C_{ij} \left|\Psi_{A_i}\right\rangle \otimes \left|\Psi_{B_j}\right\rangle \tag{3}$$

geschrieben werden kann.

a) Was muss für die C_{ij} gelten, damit $|\Psi\rangle$ ein normierter Zustand ist?

b) Die reduzierte Dichtematrix des Systems A ist gegeben durch
$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B\left[\rho\right] = \sum_k \left(\mathbb{1}_A \otimes \left\langle\Psi_{B_k}\right|\right) \rho \left(\mathbb{1}_A \otimes \left|\Psi_{B_k}\right\rangle\right) \tag{4}$$
Bestimmen Sie ρ_A für den Zustand aus Gleichung (3).

c) Zeigen Sie, dass ρ_A hermitesch ist.

d) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Tr}_A[\rho_A] = \sum_k \left\langle\Psi_{A_k}\right|\rho_A\left|\Psi_{A_k}\right\rangle = 1$ gilt und das ρ_A positiv semidefinit ist, das heißt, dass $\langle\Psi_A|\rho_A|\Psi_A\rangle \geq 0$ für beliebige $\Psi_A = \sum_i \alpha_i \Psi_{A_i}$ gilt.

e) Was folgt aus den Aufgabenteilen c) und d) für die Eigenwerte von ρ_A?

f) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Tr}_A[\rho_A^2] \leq 1$ gilt. Welchen Wert nimmt $\mathrm{Tr}_A[\rho_A^2]$ für einen reinen Zustand an?