

Aufgabe 1: Verschränkung

(3 Punkte)

Zeigen Sie, dass sich der Zustand

$$|\underline{S}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \quad \text{mit} \quad |\uparrow\downarrow\rangle \equiv |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \quad (1)$$

nicht als Produktzustand zweier unabhängiger Systeme aus $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ schreiben lässt.

Aufgabe 2: Erwartungswerte kombinierter Systeme

(7 Punkte)

Betrachten Sie wieder den Singulett-Zustand $|\underline{S}\rangle$ eines Zwei-Spin-Systems aus Gleichung (1). Die Operatoren σ und τ wirken unabhängig voneinander auf die erste, bzw. zweite Komponente des Zwei-Spin-Zustands, d.h.

$$\begin{aligned} \sigma_z |\downarrow\uparrow\rangle &= (\sigma_z \otimes I)(|\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle) = -|\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle = -|\downarrow\uparrow\rangle, \\ \tau_z |\uparrow\downarrow\rangle &= (I \otimes \tau_z)(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle) = |\uparrow\rangle \otimes -|\downarrow\rangle = -|\uparrow\downarrow\rangle, \end{aligned}$$

wobei $\sigma_{x,y,z}$ und $\tau_{x,y,z}$ die bekannten Pauli-Matrizen sind.

- (a) Berechnen Sie den Erwartungswert von $\langle \sigma_x \tau_y \rangle$ für den Zustand $|\underline{S}\rangle$.
 (b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle \sigma_x \tau_x \rangle$, $\langle \sigma_y \tau_y \rangle$ und $\langle \sigma_z \tau_z \rangle$ für die Triplett-Zustände

$$\begin{aligned} |T_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle), \\ |T_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle), \\ |T_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle). \end{aligned}$$

Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe 3: Eigenwerte und Eigenvektoren im Zwei-Spin-System

(4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Zustände $|\underline{S}\rangle, |T_1\rangle, |T_2\rangle$ und $|T_3\rangle$ Eigenzustände des Operators $\vec{\sigma} \cdot \vec{\tau}$ sind und berechnen Sie die zugehörigen Eigenwerte.

Aufgabe 4: Zeitentwicklung

(6 Punkte)

Betrachten Sie ein Zwei-Spin-System mit dem Hamilton-Operator

$$H = \frac{\omega}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{\tau}. \quad (2)$$

- (a) Was sind die möglichen Energieniveaus des Systems?
Tipp: Sie können vorherige Ergebnisse wiederverwenden.
 (b) Lösen Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung für die Anfangsbedingungen

$$|\psi(t=0)\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle, \quad |\psi(0)\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle, \quad |\psi(0)\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle, \quad |\psi(0)\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle.$$

Drücken Sie dafür $|\psi(0)\rangle$ in den Eigenzuständen des Hamilton-Operators aus.