4. Übungsblatt zur Vorlesung **SS 2016**
Theoretische Physik II **Prof. H. Päs**
Abgabe: bis Mi. 11. Mai 2016, 16:00 Uhr

Aufgabe 1: Spin im homogenen Magnetfeld **(6 Punkte)**
Gegeben sei der Hamiltonoperator $\mathscr{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z$.

a) Lösen Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung mit dem Anfangswert $|\psi(t=0)\rangle = |\rightarrow\rangle$.

b) Nach der Zeit t messen Sie σ_y. Welche Ergebnisse sind möglich und welche Wahrscheinlichkeiten haben Sie?

Aufgabe 2: Hermitesche 2×2-Matrizen **(4 Punkte)**
Zeigen Sie, dass sich eine beliebige, hermitesche 2×2-Matrix als Linearkombination der drei Pauli-Matrizen und der Einheitsmatrix darstellen lässt.

Aufgabe 3: Projektionsoperatoren **(5 Punkte)**
In der Quantenmechanik sind Operatoren wichtig, die einen Zustand auf einen Unterraum projizieren.

a) Zeigen Sie, dass diese Projektionsoperatoren idempotent sind, d.h. es gilt $P^2 = P$.

b) Welche Einschränkung muss $|\psi\rangle$ erfüllen, damit $|\psi\rangle\langle\psi|$ ein Projektionsoperator ist?

c) Wann gilt $\sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \mathbb{1}$? Wie sieht diese Identität für ein 1-Spin System aus?

d) Welche Eigenwerte kann ein Projektionsoperator haben?

Aufgabe 4: Allgemeine Unschärferelation **(5 Punkte)**
Der Erwartungswert eines Operators sei definiert als $\langle O\rangle = \langle\psi|O|\psi\rangle$ (mit normiertem $|\psi\rangle$).

a) Wir definieren $\bar{O} = O - \langle O\rangle$. Zeigen Sie $\langle\bar{O}\rangle = 0$.

b) Beweisen Sie die Identität $[A, B] = [\bar{A}, \bar{B}]$.

Die Varianz eines Operators ist definiert als $\Delta O^2 = \langle\psi|\bar{O}^2|\psi\rangle$.

c) Benutzen Sie diese Identitäten zusammen mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung $\langle x|x\rangle\langle y|y\rangle \geq |\langle x|y\rangle|^2$ und $|z|^2 \geq \mathrm{Im}(z)^2$, um die allgemeine Unschärferelation

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle\psi|[A, B]\psi\rangle|$$

für hermitsche Operatoren A und B herzuleiten.