2. Übungsblatt zur Vorlesung **SS 2016**
Theoretische Physik II **Prof. H. Päs**
Abgabe: bis Mi. 27. April 2016, 16:00 Uhr

Aufgabe 1: Quantenmechanik und Komplexität **(7 Punkte)**

Ignorieren Sie für diese Aufgabe die Definitionen von $|\otimes\rangle$ und $|\odot\rangle$ aus der Aufgabe 3 vom ersten Zettel und nehmen Sie α, β, γ und δ als unbekannt an.

$$|\otimes\rangle = \alpha\,|\uparrow\rangle + \beta\,|\downarrow\rangle \qquad |\odot\rangle = \gamma\,|\uparrow\rangle + \delta\,|\downarrow\rangle \tag{1}$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Beziehungen aus der Aufgabe 4b) vom ersten Zettel

$$\begin{aligned} \langle\odot|\uparrow\rangle\langle\uparrow|\odot\rangle &= \langle\odot|\downarrow\rangle\langle\downarrow|\odot\rangle = \langle\otimes|\uparrow\rangle\langle\uparrow|\otimes\rangle = \langle\otimes|\downarrow\rangle\langle\downarrow|\otimes\rangle = \tfrac{1}{2}, \\ \langle\odot|\rightarrow\rangle\langle\rightarrow|\odot\rangle &= \langle\odot|\leftarrow\rangle\langle\leftarrow|\odot\rangle = \langle\otimes|\rightarrow\rangle\langle\rightarrow|\otimes\rangle = \langle\otimes|\leftarrow\rangle\langle\leftarrow|\otimes\rangle = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

die Gültigkeit folgender Relationen:

$$\alpha^*\alpha = \beta^*\beta = \gamma^*\gamma = \delta^*\delta = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

b) Zeigen Sie außerdem mit den Beziehungen aus Aufgabenteil a), dass

$$\alpha^*\beta + \alpha\beta^* = \gamma^*\delta + \gamma\delta^* = 0 \tag{3}$$

gilt.

c) Zeigen Sie, dass $\alpha^*\beta$ und $\gamma^*\delta$ jeweils rein imaginär sind.

Aufgabe 2: Basis von Vektorräumen **(5 Punkte)**

Zeigen Sie, dass für einen N-dimensionalen Vektorraum eine orthogonale Basis aus N Eigenvektoren eines hermiteschen Operators konstruiert werden kann.

Aufgabe 3: Eigenwerte **(3 Punkte)**

Bestimmen Sie die Matrix A, sodass die folgenden Relationen erfüllt sind:

$$A\,|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle \tag{4}$$

$$A\,|\downarrow\rangle = -\,|\downarrow\rangle \tag{5}$$

Dabei gilt $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Um welche Matrix handelt es sich?

Aufgabe 4: Paulimatrix **(5 Punkte)**

Berechnen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren von

$$\sigma_n = \cos(\theta)\,\sigma_z + \sin(\theta)\,\sigma_x = \cos(\theta)\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} + \sin(\theta)\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \tag{6}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix} \tag{7}$$

Warum sind die sich ergebenden Eigenwerte zu erwarten gewesen?