

**Aufgabe 1: Inneres Produkt Teil 1**

**(5 Punkte)**

Aus der Vorlesung sind die folgenden Axiome für innere Produkte aus Bra und Ket Zuständen bekannt:

1.  $\langle C | (|A\rangle + |B\rangle) \rangle = \langle C | A \rangle + \langle C | B \rangle$
2.  $\langle B | A \rangle = \langle A | B \rangle^*$

Zeigen Sie damit

- (a)  $\langle (|A\rangle + |B\rangle) | C \rangle = \langle A | C \rangle + \langle B | C \rangle$ .
- (b)  $\langle A | A \rangle$  ist eine reelle Zahl.

**Aufgabe 2: Inneres Produkt Teil 2**

**(5 Punkte)**

Explizit kann das innere Produkt in  $n$  Dimensionen geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \langle B | A \rangle &= (\beta_1^* \quad \beta_2^* \quad \dots \quad \beta_n^*) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \\ &= \beta_1^* \alpha_1 + \beta_2^* \alpha_2 + \dots + \beta_n^* \alpha_n, \end{aligned} \quad (1)$$

mit den komplexen Zahlen  $\alpha_i$  und  $\beta_i, i = 1 \dots n$ .

Zeigen Sie, dass das Produkt definiert durch Gleichung (1) alle Axiome für innere Produkte erfüllt.

**Aufgabe 3: Orthogonalität Teil 1**

**(3 Punkte)**

Die Zustände  $|\uparrow\rangle$  und  $|\downarrow\rangle$  bilden eine orthonormale Basis eines zweidimensionalen Vektorraums.

Zeigen Sie, dass die Linearkombinationen

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle), \quad |\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$$

ebenfalls orthogonal zueinander sind.

**Aufgabe 4: Orthogonalität Teil 2****(7 Punkte)**

Zusätzlich zu den Vektoren  $|\rightarrow\rangle$  und  $|\leftarrow\rangle$  aus Aufgabe 3 können die Zustände

$$|\otimes\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle), \quad |\odot\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle)$$

definiert werden.

- (a) Zeigen Sie, dass  $|\otimes\rangle$  und  $|\odot\rangle$  orthogonal sind
- (b) Überprüfen Sie, ob die folgenden Relationen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} \langle\odot|\uparrow\rangle\langle\uparrow|\odot\rangle &= \langle\odot|\downarrow\rangle\langle\downarrow|\odot\rangle = \langle\otimes|\uparrow\rangle\langle\uparrow|\otimes\rangle = \langle\otimes|\downarrow\rangle\langle\downarrow|\otimes\rangle = \frac{1}{2}, \\ \langle\odot|\rightarrow\rangle\langle\rightarrow|\odot\rangle &= \langle\odot|\leftarrow\rangle\langle\leftarrow|\odot\rangle = \langle\otimes|\rightarrow\rangle\langle\rightarrow|\otimes\rangle = \langle\otimes|\leftarrow\rangle\langle\leftarrow|\otimes\rangle = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- (c) Sind  $|\otimes\rangle$  und  $|\odot\rangle$  die einzigen Zustände, die diese Bedingungen erfüllen?