

Aufgabe 1: Inneres Produkt Teil 1

(5 Punkte)

Aus der Vorlesung sind die folgenden Axiome für innere Produkte aus Bra und Ket Zuständen bekannt:

1. $\langle C | (|A\rangle + |B\rangle) \rangle = \langle C | A \rangle + \langle C | B \rangle$
2. $\langle B | A \rangle = \langle A | B \rangle^*$

Zeigen Sie damit

- (a) $\langle (|A\rangle + |B\rangle) | C \rangle = \langle A | C \rangle + \langle B | C \rangle$.
- (b) $\langle A | A \rangle$ ist eine reelle Zahl.

Aufgabe 2: Inneres Produkt Teil 2

(5 Punkte)

Explizit kann das innere Produkt in n Dimensionen geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \langle B | A \rangle &= (\beta_1^* \quad \beta_2^* \quad \dots \quad \beta_n^*) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \\ &= \beta_1^* \alpha_1 + \beta_2^* \alpha_2 + \dots + \beta_n^* \alpha_n, \end{aligned} \quad (1)$$

mit den komplexen Zahlen α_i und $\beta_i, i = 1 \dots n$.

Zeigen Sie, dass das Produkt definiert durch Gleichung (1) alle Axiome für innere Produkte erfüllt.

Aufgabe 3: Orthogonalität Teil 1

(3 Punkte)

Die Zustände $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ bilden eine orthonormale Basis eines zweidimensionalen Vektorraums.

Zeigen Sie, dass die Linearkombinationen

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle), \quad |\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$$

ebenfalls orthogonal zueinander sind.

Aufgabe 4: Orthogonalität Teil 2**(7 Punkte)**

Zusätzlich zu den Vektoren $|\rightarrow\rangle$ und $|\leftarrow\rangle$ aus Aufgabe 3 können die Zustände

$$|\otimes\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle), \quad |\odot\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle)$$

definiert werden.

- (a) Zeigen Sie, dass $|\otimes\rangle$ und $|\odot\rangle$ orthogonal sind
- (b) Überprüfen Sie, ob die folgenden Relationen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} \langle\odot|\uparrow\rangle\langle\uparrow|\odot\rangle &= \langle\odot|\downarrow\rangle\langle\downarrow|\odot\rangle = \langle\otimes|\uparrow\rangle\langle\uparrow|\otimes\rangle = \langle\otimes|\downarrow\rangle\langle\downarrow|\otimes\rangle = \frac{1}{2}, \\ \langle\odot|\rightarrow\rangle\langle\rightarrow|\odot\rangle &= \langle\odot|\leftarrow\rangle\langle\leftarrow|\odot\rangle = \langle\otimes|\rightarrow\rangle\langle\rightarrow|\otimes\rangle = \langle\otimes|\leftarrow\rangle\langle\leftarrow|\otimes\rangle = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- (c) Sind $|\otimes\rangle$ und $|\odot\rangle$ die einzigen Zustände, die diese Bedingungen erfüllen?