

# Kosmologische Phasenübergänge und topologische Defekte

Jan Denkers\*

Technische Universität Dortmund

Kosmologische Phasenübergänge sind ein direktes Resultat der Beschreibung der Natur über spontane Symmetriebrechung, wie sie zB in der elektroschwachen Symmetriebrechung, als auch bei Symmetriebrechung die GUT's mit dem Standardmodell in Verbindung bringen, vorkommen. Dabei auftretende Phasenübergänge können zu lokal verschiedenen Vakua führen und damit zu Orten mit topologischen Defekten, wie sie auch bei Phasenübergängen von Festkörpern bekannt sind. Dieser Artikel beinhaltet eine Reihe von einfachen Modellen, die als Beispiel für im Kosmos möglicherweise abgelaufene Arten von Phasenübergängen, als auch deren mögliche Defekte dienen.

## PHASENÜBERGÄNGE

### Zustandssumme

Um den Zusammenhang der Quantenfeldtheorie zur Thermodynamik zu gewinnen, müssen wir das zentrale Objekt dieser ausstellen. Dieses ist die Zustandssumme, aus der die thermodynamischen Potentiale und damit alle thermodynamischen Größen berechnet werden können. Die Zustandssumme ist wie üblich definiert als  $Z = \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}}$ . In der Quantenfeldtheorie ist es hingegen üblicher mit Lagrangedichten zu arbeiten. Dazu bringt man die Hamiltondichte mit der Lagrangedichte über eine Legendretransformation in Zusammenhang und führt eine Wickrotation  $\tau = it$ ,  $\bar{\partial}_\mu = \left(i \frac{\partial \phi}{\partial \tau}, \nabla \phi\right)$  durch. Die Spurbildung geht dabei in eine Integration über periodische Randbedingungen  $\phi(\tau = 0, x) = \varepsilon \phi(\tau = \beta, x)$  über. Dabei ist für den bosonischen Fall in dieser Formel  $\varepsilon = 1$  und für den fermionischen Fall  $\varepsilon = -1$  zu setzen. Somit ergibt sich [1]

$$Z = N(\beta) \int_{PBC} \mathcal{D}\phi \exp \left[ \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \bar{\partial}_\mu \phi) \right]. \quad (1)$$

Hat man diese Zustandssumme zur Verfügung, ergibt sich die Freie Energiedichte als  $\mathcal{F} = \frac{-\ln(Z)}{\beta}$ . So lässt sich beispielsweise für freie bosonische und fermionische Felder die Freie Energiedichte explizit als  $\mathcal{F} = -(N_B + \frac{7}{8}N_F) \frac{\pi^2 T^4}{90}$  berechnen. Hierbei stellen  $N_F$  und  $N_B$  die fermionischen und bosonischen Freiheitsgrade dar. Um die spontane Symmetriebrechung beschreiben zu können, widmen wir uns jetzt der Beschreibung des Übergangs zu einer effektiven Theorie.

### Effektives Potential bei endlicher Temperatur

Um das effektive Niederenergieverhalten des Lagrangian zu beschreiben [2], gehen wir wie folgt vor. Den Potentialanteil des Lagrangian entwickeln wir um den Erwartungswert in einen Tree-Level-Beitrag  $V_0$  und eine Ein-Loop-Korrektur  $V_1$ , also  $V(\langle \phi \rangle) = V_0(\langle \phi \rangle) + V_1(\langle \phi \rangle)$ . Mit dieser Definition lässt sich der Anteil

$V_1$  effektiv über [1]

$$\begin{aligned} & \exp\left(-\int_0^\beta d\tau \int d^3x V_1(\langle \phi \rangle)\right) \\ &= \int_{PBC} \mathcal{D}\phi \exp\left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_{quad}(\langle \phi \rangle, \Delta\phi)\right] \end{aligned} \quad (2)$$

berechnen. Dabei stellt  $\mathcal{L}_{quad}$  den Anteil des Lagrangian dar, der entsteht, wenn man die Ersetzung  $\phi = \langle \phi \rangle + \tilde{\phi}$  mit ( $\tilde{\phi} := \Delta\phi$ ) durchführt und dabei nur die im Lagrangian quadratisch in  $\tilde{\phi}$  auftretenden Terme beibehält. Ein typischer Lagrangian hat dementsprechend die Gestalt [1]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{quad} = & -\frac{1}{2}[M_S^2]_{ij} \tilde{\phi}_i \tilde{\phi}_j + \frac{1}{2}[M_V^2]_{ab} A_a^\mu A_{b\mu} - [M_F^2]_{rs} \psi_r \bar{\psi}_s \\ & + \frac{1}{2} \bar{\partial}_\mu \tilde{\phi}_i \bar{\partial}^\mu \tilde{\phi}_i - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\bar{\partial}_\mu A_a^\mu)^2 + \partial_\mu \eta_a^* \partial^\mu \eta_a. \end{aligned} \quad (3)$$

Hierbei stellen  $\phi$  bosonische,  $\psi$  fermionische und  $A_\mu^a$  Eichfelder dar und  $F_{\mu\nu}$  sind ihre zugehörigen Feldtensoren, sowie  $\eta_a$  ihre Geistfelder, die ein Überzählen nicht existenter Freiheitsgrade verhindern. Die Massenmatrizen  $M_i$  sind von dem jeweiligen Felderwartungswert abhängig. Weiter wird üblich die Ein-Loop-Korrektur in einen temperaturunabhängigen  $V_1^0$  und einen temperaturabhängigen Anteil  $V_1^T$  aufgeteilt, also  $V_1 = V_1^0 + V_1^T$ . So lässt sich zB für den temperaturabhängigen Ein-Loop-Anteil

$$\begin{aligned} V_1^T = & \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dy y^2 \left( \sum_i \ln[1 - \exp(-\sqrt{y^2 + T^{-2}[M_S^2]_i})] \right. \\ & + \sum_a (3 \ln[1 - \exp(-\sqrt{y^2 + T^{-2}[M_V^2]_a})] - \ln(1 - e^{-y})) - \\ & \left. \sum_r 4 \ln[1 + \exp(-\sqrt{y^2 + T^{-2}[M_F^2]_r})] \right) \end{aligned} \quad (4)$$

berechnen. Nimmt man an diesem Ausdruck eine Hochtemperaturentwicklung vor, nimmt also die auftretenden Massenmatrizen als klein gegenüber der Tempe-

ratur an, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
V_1^T &= -\frac{\pi^2 T^4}{90} (N_B + \frac{7}{8} N_F) \\
&+ \frac{T^2}{24} (\text{tr}(M_S^2) + 3\text{tr}(M_V^2) + 2\text{tr}(M_F^2)) \\
&- \frac{T}{12\pi} (\text{tr}(M_S^2)^{\frac{3}{2}} + 3\text{tr}(M_V^2)^{\frac{3}{2}}) + \dots
\end{aligned} \quad (5)$$

Mit dieser Vorarbeit widmen wir uns nun einem einfachen Modellsystem.

### Ein einfaches Modell

Als einfaches Modell mit einem Higgsmechanismus verwenden wir den Lagrangian (6) mit einem skalaren komplexen Feld und einem U(1)-Eichfeld.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \bar{D}_\mu \phi \bar{D}^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^* - \frac{\lambda}{4} (\phi \phi^*)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\
&- \frac{1}{2\xi} (\bar{\partial}_\mu A^\mu)^2 + \bar{\partial}_\mu \eta^* \bar{\partial}^\mu \eta \\
\bar{D}^\mu \phi^{(*)} &:= (\bar{\partial}_\mu + (-)ieA_\mu) \phi^{(*)}
\end{aligned} \quad (6)$$

Die Klammern in der letzten Gleichung sind dabei so zu verstehen, dass die eingeklammerte Größe für den komplex konjugierten Fall gilt. Führen wir jetzt nach diesem Schema die Feldredefinition um den Erwartungswert  $\langle \phi \rangle =: \frac{\phi_c}{\sqrt{2}}$  und  $\phi =: \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_c + \phi_1 + i\phi_2)$  durch, ergibt sich [1]

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{quad} &= -\frac{1}{2} \left( m^2 + \frac{3\lambda}{4} \phi_c^2 \right) \phi_1^2 - \frac{1}{2} \left( m^2 + \frac{\lambda}{4} \phi_c^2 \right) \phi_2^2 \\
&+ \frac{e^2}{2} \phi_c^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2} (\bar{\partial}_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2} (\bar{\partial}_\mu \phi_2)^2 \\
&- \frac{1}{2\xi} (\bar{\partial}_\mu A^\mu)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\partial}_\mu \eta^* \bar{\partial}^\mu \eta.
\end{aligned} \quad (7)$$

Da unsere Vorarbeit schon hinreichend war, können wir jetzt die Massenmatrizen einfach ablesen, indem wir Koeffizienten vergleichen. Es ergibt sich also

$$M_S^2 = \text{diag}(m^2 + \frac{3\lambda}{4} \phi_c^2, m^2 + \frac{\lambda}{4} \phi_c^2) \quad (8)$$

$$M_V^2 = e^2 \phi_c^2. \quad (9)$$

Mit diesen Resultaten beginnen wir jetzt für einen Spezialfall, der es uns ermöglicht einfache polynomielle Ausdrücke zu erhalten, die Untersuchung des Phasenübergangs. Nehmen wir also vereinfachend an es gelte  $e^4 \ll \lambda$ ,  $\lambda \phi_c^2 \gg m^2$  und dass die Temperatur hoch gegenüber den Massentermen ist. Für diesem Fall können wir die Hochtemperaturentwicklung nutzen und die temperaturabhängigen Terme, die Proportionalitäten zu  $\lambda^2$  und  $e^4$  enthalten, können gegen die Tree-Level-Terme

vernachlässigt werden. Für die verbleibenden Terme des effektiven Potentials ergibt sich

$$V = -\frac{4\pi^2 T^4}{90} + \frac{1}{2} m^2(T) \phi_c^2 - \frac{CT}{3} \phi_c^3 + \frac{\lambda}{16} \phi_c^4. \quad (10)$$

Hier wurden als Abkürzungen  $4\pi C := (\frac{3\lambda}{4})^{\frac{3}{2}} + (\frac{\lambda}{4})^{\frac{3}{2}} + 3e^2$  und  $m^2(T) := m^2 + \frac{(\lambda+3e^2)T^2}{12}$  genutzt. Nun identifizieren wir interessante Bereiche in der Zeitentwicklung des Abkühlens. Zum einen stellt sich die Frage, wann stellt sich ein von Null verschiedenes Minimum in diesem Potential ein. Dafür differenzieren wir und erhalten, wenn  $T < T_1 = \frac{T_0}{\sqrt{1+C^2 T_0^2/(\lambda m^2)}}$  gilt, dass ein solches Minimum bei  $\nu \left[ \frac{CT}{\sqrt{\lambda|m|}} + (1 - \frac{T^2}{T_1^2})^{1/2} \right]$  mit  $\nu := \frac{2|m|}{\sqrt{\lambda}}$  existiert. Die kritische Temperatur, bei der sich dieses als erstes Mal einstellt, ergibt sich als  $T_C^2 := \frac{T_0^2}{1+8C^2 T_0^2/(9m^2\lambda)}$ . Es gilt sogar, dass das Minimum bei Null nur, wenn  $T^2 > T_0^2 = -\frac{12m^2}{\lambda+3e^2}$  ist existiert. Diese Temperaturen lassen sich in der Reihenfolge  $T_1 > T_C > T_0$  anordnen. Graphisch stellt sich der Zusammenhang wie in Abbildung 1 dar.

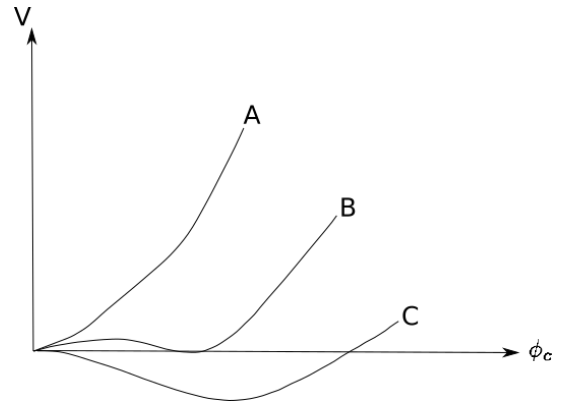


Abbildung 1. Potentialverlauf mit A,B,C für  $T > T_1, T = T_C$  und  $T < T_0$  [1]

Bei Temperaturen größer  $T_1$  weißt das Potential nur ein Minimum für  $\phi_c = 0$  auf. Kühlt das Universum nun auf einen Wert von  $T_C$  ab, ergibt sich ein zweites Minimum  $\phi_c \neq 0$  gleicher Höhe. Sinkt die Temperatur unter  $T_0$ , verschwindet das Minimum bei Null und der Felderwartungswert des Universums kann ohne zu Tunneln sich den neuen Minimum nähern. Betrachtet man den Ausdruck für die Lage des Minimums  $\nu \left[ \frac{CT}{\sqrt{\lambda|m|}} + (1 - \frac{T^2}{T_1^2})^{1/2} \right]$  ist erkennbar, dass wenn  $C$  ungefähr Null ist, das neue echte Vakuum dem falschen Vakuum sehr nah ist und dass nur eine geringe Potentialbarriere zwischen ihnen liegt. Deswegen ist ein Tunneln wahrscheinlich, was einem effektivem Phasenübergang zweiter Ordnung entspricht. Ist  $C$  hingegen nicht klein, durchläuft das Vakuum einen Sprung beim Tunneln, was einen Phasenübergang erster Ordnung entspricht. Nach-

dem wir ein rein fiktives Modell betrachtet haben, wenden wir uns den bekanntesten Phasenübergang bei der elektroschwachen Symmetriebrechung zu.

### Symmetriebrechung in der elektroschwachen WW

Im Fall der elektroschwachen Symmetriebrechung [2] haben wir es mit einer  $(SU(2)_L \times U(1)_\gamma)$ -Symmetrie zu tun. Der Eichfeldanteil des Lagrangian lautet

$$\mathcal{L}_{Eich} := -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \quad (11)$$

mit  $W_{\mu\nu}^a := \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g\epsilon^{abc}W_\mu^b W_\nu^c$  dem  $SU(2)_L$ - und  $B_{\mu\nu} := \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$  dem  $U(1)_\gamma$ -Eichfeldstärketensoren. Die nach der spontanen Symmetriebrechung entstehenden Felder werden als Linearkombinationen

$$A_\mu := \cos \Theta_W B_\mu + \sin \Theta_W W_\mu^3 \quad (12)$$

$$Z_\mu := -\sin \Theta_W B_\mu + \cos \Theta_W W_\mu^3 \quad \text{und} \quad (13)$$

$$W_\mu^\pm := W_\mu^1 \pm iW_\mu^2 \quad (14)$$

angesetzt. Der Winkel  $\Theta_W$  trägt den Namen Weinbergwinkel und lässt sich experimentell aus den Massen der  $W^\pm$ - und  $Z$ -Bosonen bestimmen. Außerdem gibt es einen Zusammenhang zwischen der elektrischen Elementarladung und den Kopplungskonstanten der  $W$ - und  $B$ -Felder. Dieser lautet  $g \sin \Theta_W = e = g' \cos \Theta_W$  und lässt Rückschlüsse auf diese Konstanten zu. Führen wir nun ein Higgsfeld ein, das an das  $SU(2)_L$ -Eichfeld koppelt und damit, bei passend gewählten Potential, im Laufe des Abkühlvorgangs des Universums die spontane Symmetriebrechung hervorruft. Dieses Higgsfeld wird als Dublett unter der  $SU(2)_L$  als  $H = \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix}$  mit schwacher Hyperladung  $Y = 1/2$  und Lagrangian

$$\mathcal{L}_{Higgs} := (D_\mu H)^\dagger (D^\mu H) - m^2 H^\dagger H - \lambda (H^\dagger H)^2, \quad (15)$$

wobei  $D_\mu H := (\partial_\mu + ig\frac{1}{2}\tau_a W_\mu^a + ig'\frac{1}{2}B_\mu)H$  gilt, angesetzt. Wie im Prozedere zuvor wird ein Erwartungswert  $\langle H \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_c/\sqrt{2} \end{pmatrix}$  gesetzt. Hierbei lässt sich oBdA eine Komponente in Rahmen einer Eichung auf Null setzen, da sie zu einer  $SU(2)$ -Symmetriedarstellung gehört. Unter Berücksichtigung der experimentellen Werte lässt sich wieder eine Hochtemperaturnäherung rechtfertigen [1]. Dabei ergibt sich als Potential  $V(\phi_c) = \frac{1}{2}m^2(T)\phi_c^2 - \frac{1}{3}CT\phi_c^3 + \frac{\lambda}{4}\phi_c^4 - (N_B + \frac{7}{8}N_F)\frac{\pi^2 T^4}{90} + B\phi_c^4(\ln(\frac{\phi_c^2}{M^2}) - \frac{25}{6})$ . Es wurden dabei die Abkürzungen  $m^2(T) := m^2 + \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{e^2(1+2\cos^2\Theta_W)}{4\sin^2(2\Theta_W)} + \sum_f \frac{h_f^2}{12}\right)T^2$ , wobei  $h_f$  die Yukawa-Kopplungskonstanten sind,  $C := \frac{3e^3(1+2\cos^2\Theta_W)}{4\pi\sin^3(2\Theta_W)}$  und  $B := \frac{3}{4}\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)\frac{1+2\cos^4\Theta_W}{\sin^4(2\Theta_W)} - \frac{1}{64\pi^2}\sum_f h_f^2$  eingeführt. In diesem Fall ist die Konstante  $C$  hinreichend klein, damit es

sich um einen effektiven Phasenübergang zweiter Ordnung handelt. Hiermit ist ein bekannter existenter Fall für einen Phasenübergang im frühen Universum geben. Desweiteren ergibt sich, bei der Konstruktion von GUTs und anderen das Standardmodell erweiternden Theorien, häufig das Standardmodell als ein effektives Modell bei niedrigen Energien. Beim Phasenübergang in dieses werden die angenommen höheren Symmetrien spontan gebrochen. Abhängig davon in welche größere Symmetriegruppe eingebettet wird und wie, als auch wie viele, Phasenübergänge auftreten, ergibt sich eine Vielzahl an Szenarien und Phasenübergängen verschiedener Ordnungen. Beim kontinuierlichen Phasenübergang ist die Dynamik offensichtlich. Dieser tritt immer genau dort auf, wo sich die Region des Universums hinreichend abgekühlt hat. Beim Phasenübergang erster Ordnung hingegen bleibt die interessante Dynamik, die durch das Tunneln entsteht, zu diskutieren.

### Blasenbildung bei Phasenübergängen erster Ordnung

Zur Untersuchung von Phasenübergängen erster Ordnung im frühen Universum wird an dieser Stelle ein einfach zu behandelndes semiklassisches Modell [3] genutzt, was aber die gesamte für uns interessante Dynamik eines solchen Phasenübergangs beschreiben kann. Beim Phasenübergang erster Ordnung muss das Potential von einem falschen Vakuum mit höherer Energie in ein energetisch tiefer liegendes echtes Vakuum tunneln. Da dieses mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit passiert, ist eine Unterkühlung zu erwarten, wie man sie aus der Festkörperphysik auch von zB kochendem Wasser kennt. Zur Beschreibung nutzen wir ein skalares Feld  $\phi$ . Im semiklassischen Limit  $\hbar \rightarrow 0$  ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für ein Tunneln über die Wirkung  $S_E$  der euklidischen Euler-Lagrange-Gleichung. Als Randbedingungen muss dabei gesetzt werden, dass  $\phi$  das falsche Vakuum, wenn  $it \rightarrow \pm\infty$ , erreicht und dass für  $t = 0$  die Wirkung stationär wird. So ergibt sich  $\Gamma = Ae^{-S_E/\hbar}$ . Es lässt sich zeigen, dass die Zustände die die Wirkung minimieren eine  $SO(4)$ -Symmetrie erfüllen, weshalb man entsprechend eine Lösung sinnvollerweise als radialsymmetrisch ansetzt. Es ergeben sich also runde Blasen in der Raumzeit in Analogie zu kochendem Wasser. Führt man nun weitere Näherungen durch, wie die sogenannte dünne Wand Approximation, bei der man annimmt, dass der Bereich in dem sich weder das echte noch das falsche Vakuum eingestellt hat, klein gegenüber dem Radius der Blase ist, ergibt sich aus der Wirkung  $S_E = 2\pi^2 \int_0^\infty d\rho \rho^3 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 + V(\phi) \right]$  die DGL  $\frac{d^2\phi}{d\rho^2} = V'_0(\phi)$ . Berechnet man die Ausbreitungsgeschwindigkeit in dem man von euklidischer Zeit zur Realzeit übergeht, ergibt sich eine Ausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit. Setzt

man als Potential für diesen Ausdruck einen Schnitt eines Mexican-Hat-Potentials  $V_0(\phi) = \frac{\lambda}{8} \left( \phi^2 - \frac{\mu^2}{\lambda} \right)^2$  ein, ergibt sich  $\phi = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \tanh \left[ \frac{\mu}{2} (\rho - \rho_0) \right]$  und für  $S_E = \frac{8\pi^2 \mu^2}{\epsilon^3 \lambda^4}$  mit  $\epsilon$  der Potentialdifferenz der Vacua. Als nächstes wenden wir uns topologischen Defekten, also Artefakten eines Phasenübergangs, zu.

## TOPOLOGISCHE DEFEKTE

Beschreibt man das Universum über Modelle bei denen das Standardmodell als effektive Theorie einer spontan gebrochenen Phase hervor geht, ergibt sich die Frage, wie man eventuelle Rückschlüsse auf die Art dieser Phasenübergänge erhält oder man noch Artefakte von diesen sieht. Je nach dem welcher Art der Symmetriebruch ist, ergeben sich verschiedene mögliche topologische Defekte. Im Folgenden werden einfache Modelle[1] vorgestellt, die bereits die zu erwartenden Defekte produzieren. Um der Frage nachzugehen, warum Defekte auftreten müssen, macht man sich durch folgende Überlegung klar [4]. Da das Universum sehr homogen ist, erreichen viele Punkte gleichzeitig die kritische Temperatur. Da aber Bereiche nur mit Distanzen, die innerhalb der Lichtgeschwindigkeit erreicht werden können, korreliert sein können, kommt es unweigerlich zu Orten verschiedener Phasen, wenn die Vacua entartet sind.

### Domain Walls

Domain Walls sind einer der wohl aus der Festkörperphysik bekanntesten Vertreter eines topologischen Defektes. Ein Beispiel hierfür ist in Abbildung 2 gegeben. Sie treten auf, wenn energetisch gleiche oder annähernd gleiche Vacua im Potential vorhanden sind.

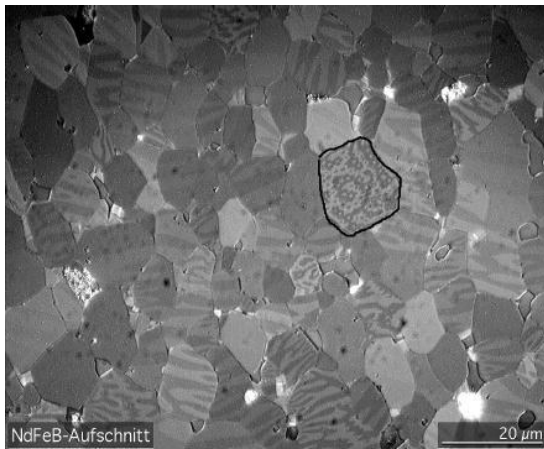


Abbildung 2. NdFeB-Domains [5]

Ein einfaches Modell ist zB der Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (16)$$

mit  $V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - \eta^2)^2$  eines reellen skalaren Feldes  $\phi$ . Dieser Lagrangian ist  $\mathbb{Z}_2 : \phi \rightarrow -\phi$ -symmetrisch und hat die gleichberechtigten Vacua  $\pm\eta$ . Nimmt man exemplarisch eine Domänenwand in der x-y-Ebene an, führt dies auf eine DGL  $\frac{d^2 \phi}{dz^2} = V'(\phi)$ , mit der ebenfalls aus der Festkörperphysik bekannten Lösung  $\phi = \mp \eta \tanh \left[ \frac{\eta \sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}} (z - z_0) \right]$  und der Energie pro Fläche  $E = \frac{2}{3} \sqrt{2} \lambda \eta^3$ . Solche die Symmetrie beinhaltenden Lösungen lassen sich nicht kontinuierlich in ein Vakuum transformieren, ohne dass die Energiedichte divergiert und beinhalten deswegen einen topologischen Schutz. Entgegen der vereinfachten Annahme, sind ebenfalls gekrümmte Domänenwände und von diesen eingeschlossene Gebiete möglich. Es bleibt noch die Frage zu klären, ob heutige Messungen die Existenz solcher Domänenwände stützen oder ausschließen. Betrachtet man den Skalenfaktor der Energiedichte mit der Expansion des Universums der Domänenwände, kommt man auf einen Faktor von  $a^{-1}(t)$ , verglichen mit Skalenfaktoren von  $a^{-3}(t)$  und  $a^{-4}(t)$  bei Materie und Strahlung. Domänenwände würden deswegen den Energieinhalt des Universums schnell dominieren, was aber mit den heutigen Messungen nicht in Einklang zu bringen ist. Möglich wären sie aber in einem Szenario mit einer Inflationsphase die ihre Masse hinreichend ausgedünnt hat.

### Kosmische Strings

#### Globale Kosmische Strings

Eine andere Art topologischen Defekt erhält man, wenn der Lagrangian eine  $U(1)$ -Symmetrie  $\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi$  für ein komplexes Skalarfeld in der Form

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (17)$$

mit  $V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi - \eta^2)^2$  ein Mexican-Hat-Potential beinhaltet. Dieses Potential enthält ein entartetes Minimum bei  $\phi = \eta e^{i\beta}$  gleicher Symmetrie. Setzt man eine radialsymmetrische Lösung in Zylinderkoordinaten  $\phi = \eta e^{in\Theta} f(\rho)$  an, erhält man als neue DGL  $\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho} - \frac{n^2}{\rho^2} f = f(f^2 - 1)$  mit  $\xi := \lambda^{1/2} \eta \rho$ , sowie den Randbedingungen  $f \rightarrow 0$ , wenn  $\rho \rightarrow 0$  und  $f \rightarrow 1$ , wenn  $\rho \rightarrow \infty$ . Diese ist numerisch zu lösen. Man sieht an der undefiniertheit des Winkels bei  $\rho = 0$ , dass die Phase im Inneren eines Strings nicht gebrochen ist. Untersucht man ihre Asymptotik für  $\rho \rightarrow \infty$ , erhält man einen Ausdruck der für die Integration um einen solchen String immer einen Faktor, der sich nur um ein Vielfaches aus  $\mathbb{Z}$  ändern kann,



liefert. Dieses repräsentiert im Falle der Strings den topologischen Schutz, der nicht durch kontinuierliche Transformation aufgehoben werden kann. Im Falle von lokalen Eichsymmetrien, wie sie im Standardmodell auftreten, müssen wir aber unser Modell anpassen, was wir im nächsten Abschnitt tun werden.

### Lokale Kosmische Strings

Betrachten wir nun einen Lagrangian der Form

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - V(\phi) \quad (18)$$

mit  $V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi - \eta^2)^2$ . Dieser enthält die lokale  $U(1)$ -Symmetrie  $\phi \rightarrow e^{i\Lambda(x)} \phi$  und  $A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda(x)$ . Er hat ein Minimum bei  $\phi = \eta e^{i\beta}$ . In Analogie zur Berechnung einer rotationssymmetrischen Lösung im Fall globaler kosmischer Strings ist dies ebenfalls bei lokalen Strings möglich. Hier muss nun aber zusätzlich das  $A_\mu$ -Feld angepasst werden, damit keine unphysikalischen Divergenzen der Energiedichte pro Länge entstehen. In der Festkörperphysik sind solche Flusschlitze bei Supraleitern des Typs 2 bekannt. Wenn solche Phänomene auftreten, stellt sich die Frage nach ihren Eigenschaften und eventuellen Messmöglichkeiten, der wir jetzt nachgehen werden. Eine Möglichkeit zur Messung besteht darin, den linienförmigen Gravitationslinseneffekt, der von diesen hervorgerufen wird, zu beobachten, wie er in Abbildung 3 illustriert ist.

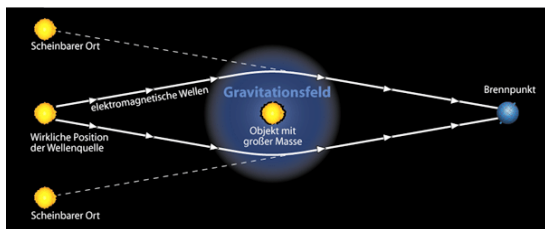


Abbildung 3. Gravitationslinseneffekt [6]

Eine andere Möglichkeit besteht darin, sie über Gravitationswellen, die bei Ihrer charakteristischen Dynamik entstehen können, zu identifizieren. Zunächst betrachten wir ihre Dynamik. Diese lässt sich mit der Dynamik von bosonischen Strings (der Stingtheorie) identifizieren. Sie haben ein nicht lineares und komplexes Verhalten, wie man an den zwei Simulationen 4 und 5 sehen kann.

Abbildung 4. Kollision zweier Strings [7]

So sieht man zB am Abbildung 4, dass sich bei einer Überschneidung von zwei Strings ein Loop bildet.

Abbildung 5. Kollision verschachtelter Loops [7]

In Abhängigkeit davon in welcher Phase der Universumentwicklung sich Strings bilden, zB in der materiedominierten oder der strahlungsdominierten Epoche, hat die verschiedene Expansionsgeschwindigkeit direkten Einfluss auf die Gestalt des sich entwickelnden String- und Loopnetzwerkes. In den Abbildungen 6 und 7 sind Zeitentwicklungen in verschiedenen Epochen der Entwicklung des Universums dargestellt. Dabei wird die dargestellte Box mit der Ausdehnung mitgedehnt und reskaliert.

ristische Quadropolstruktur. Diese ist in Abbildung 8 simuliert.

Abbildung 6. Zeitentwicklung in der materiedominierten Ära [7]

In Abbildung 6 ergeben sich für die materiedominierte Epoche, in der die Expansion schneller ist als in der strahlungsdominierten Epoche, weniger "kruselige" Strings, da diese von der Expansion geglättet werden. Da die Loop-Produktion von Überschneidung von Strings abhängt, entstehen dementsprechend auch weniger Loops als in der Abbildung 7, in der die Expansion aufgrund der Strahlungsdominanz langsamer ist.

Abbildung 7. Zeitentwicklung in der radiationsdominierten Ära [7]

Gravitationwellen dieser Strings haben eine charakte-

Abbildung 8. Kollision zweier Strings [7]

Zuletzt bleibt noch ein Effekt, der für die magnetischen Monopole ebenfalls wichtig ist und im nächsten Abschnitt besprochen wird, denn er betrifft die ungebrochene Phase im Inneren.

### Magnetische Monopole

Als letztes widmen wir uns magnetischen Monopolen. Hierfür nehmen wir als Modelllagrangian

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)(D^\mu \phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{8} (\phi \cdot \phi - \eta^2)^2 \quad (19)$$

an. Dieser enthält eine lokale  $SO(3)$ -Symmetrie, wobei  $\phi$  ein  $SO(3)$ -Triplet,  $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g\epsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c$  und  $D_\mu = \partial_\mu \phi_a - g\epsilon_{abc} A_\mu^b \phi_c$  ist. Sein Minimum ist bei  $|\phi| = \eta$  gelegen. In völliger Analogie zu kosmischen Strings setzen wir jetzt für dieses Modell seiner Symmetrie entsprechend eine kugelsymmetrische Lösung  $\phi = \eta f(r) \vec{r}$  an. Um die Lösung zu bestimmen, müssen noch Ansätze für das  $A_\mu^a$ -Feld gemacht werden, um eine Lösung endlicher Energie zu finden. Insgesamt ist man wieder auf numerische Lösungen angewiesen, wie es in den vorherigen Fällen auch der Fall war. Ebenfalls kann man wie beim String eine topologische "Ladungszahl" dem Monopol zuweisen, die nicht durch kontinuierliche Transformationen zerstört werden kann. Diesmal erhält man sie durch eine Integration über eine Kugelschale um den Monopol. Besonders, wie im Falle der kosmischen Strings, ist das Zentrum der Monopole, was einen Punkt ungebrochener Phase darstellt. Dieser Bereich könnte Prozesse erlauben, die in der gebrochenen Phase unterdrückt sind. Es könnte beispielsweise sein, dass in einem solchen Punkt Baryonenzahlverletzung möglich ist. Es wäre zB denkbar, wenn sich Monopole in Neutronensternen sammeln, man an diesen unerwartete Zerfallsprozesse beobachten könnte.

**FAZIT**

---

Topologische Defekte könnten als Überrest eines uns unbekanntem Phasenübergangs entstehen. Punkte ungebrochener Phase könnten uns Informationen über diesen liefern. Darüber hinaus lassen sich Theorien bezüglich der verschiedenen vorhergesagten Arten von topologischen Defekten bei Phasenübergängen mit kosmologischen Betrachtungen falsifizieren.

\* jan.denkers@tu-dortmund.de

- [1] D. Bailin and A. Love, *Cosmology in Gauge Field Theory and String Theory*.
- [2] D. Bailin and A. Love, *Introduction to Gauge Field Theory*.
- [3] S. Coleman, Phys. Rev. D **15**, 2929 (1977).
- [4] T. W. B. Kibble, Journal of Physics A: Mathematical and General **9**, 1387 (1976).
- [5] "Wikimedia," (2016).
- [6] "Website der Max Planck Gesellschaft," (2016).
- [7] "Cambridge Cosmology Website," (2016).