

Inflation

Maximilian Reininghaus

18. Januar 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Probleme des kosmologischen Standardmodells	1
2.1	Horizont-Problem	1
2.2	Flachheits-Problem	2
2.3	Relikte-Problem	2
3	Lösung durch beschleunigte Expansion	2
3.1	Lösung des Flachheits-Problems	3
3.2	Lösung des Horizont-Problems	3
3.3	Lösung des Relikte-Problems	4
4	Feldtheoretische Modelle	4
4.1	Dynamik des Inflaton-Feldes	4
4.2	Klassifizierung von Inflationsmodellen	5
4.3	Reheating	5
5	Inflation und Beobachtungen	5

1 Einleitung

Im Standardmodell der Kosmologie (CSM) bleiben einige Eigenschaften des Universums ohne befriedigende Erklärung und können nur durch sehr feine Abstimmungen der Anfangsparameter erklärt werden. Inflationstheorien, in denen das Universum zu einer sehr frühen Phase beschleunigt expandierte, können hier Abhilfe verschaffen.

2 Probleme des kosmologischen Standardmodells

2.1 Horizont-Problem

Die Region des Raums, die seit dem Urknall bis zum Zeitpunkt t einen Punkt kausal beeinflusst haben kann, ist begrenzt durch den *kausalen* oder *Teilchen-Horizont* $d_H(t)$, da eine Ausbreitung von Information höchstens lichtartig erfolgen kann. Aus $ds^2 = 0$ folgt

$$d_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.1)$$

Für $a(t) \propto t^\gamma$ ($\gamma = 1/2, 2/3$ für Strahlung bzw. Materie) ergibt sich $d_H(t) = t/(1 - \gamma)$ und ist somit begrenzt. Die Entfernung, die CMB-Photonen seit ihrer Entstehung bei der Rekombination zurückgelegt haben, ist nur geringfügig kleiner als der heutige kausale Horizont $d_H(t_0) \approx 1,4 \cdot 10^{10}$ yr),

falls die Evolution des Skalenfaktors für alle Zeiten nach dem Standardmodell stattfindet. Vergleicht man $d_H(t_0)$ mit dem bis heute expandierten Horizont zum Zeitpunkt der Rekombination $d_H(t_{\text{rec}} \approx 3,8 \cdot 10^5 \text{ yr})$, so findet man, dass sich das heute beobachtbare Universum quasi aus $\sim 10^5$ Regionen zusammensetzt, die bis zur Rekombination untereinander nicht in kausalem Kontakt standen – und somit auch kein thermisches Gleichgewicht ausbilden konnten. Vor diesem Hintergrund ist es rätselhaft, wieso der CMB bis auf Schwankungen $\delta T/T \sim 10^{-5}$ sehr isotrop ist.

2.2 Flachheits-Problem

Die erste Friedmann-Gleichung (ohne kosmologische Konstante Λ) lässt sich schreiben als

$$\Omega(t) - 1 = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)} - 1 = \frac{k}{\dot{a}^2(t)}, \quad (2.2)$$

wobei $\rho_c(t)$ die kritische Dichte bezeichnet. $\Omega(t) - 1$ kann dabei als Abweichung von einem flachen Universum interpretiert werden. Für ein Fluid mit Zustandsgleichung

$$p = \alpha \rho, \quad (\text{Materie: } \alpha = 0, \text{ Strahlung: } \alpha = 1/3) \quad (2.3)$$

wird (2.2) gelöst durch

$$\Omega - 1 = \frac{k}{\frac{8\pi G}{3} b a^{-(1+3\alpha)} - k}, \quad (2.4)$$

wobei b eine Integrationskonstante darstellt [6]. Es wird deutlich, dass die Lösung für $k = \pm 1$ und $\alpha > -1/3$ instabil ist, d.h., eine Abweichung von $\Omega = 1$ wächst mit der Zeit an. Heutige Beobachtungen, zuletzt $\Omega_K \equiv 1 - \Omega_0 = 0,000(5)$ durch Planck [1], zeigen aber, dass das Universum sehr flach ist. Falls also $k \neq 0$ ist, muss das Universum früher noch wesentlich flacher gewesen sein (die Anfangsdichte sehr nahe bei ρ_c), als es jetzt bereits ist. Beispielsweise muss zu $T \simeq 1 \text{ MeV}$ schon $|\Omega - 1| \lesssim 10^{-15}$ gewesen sein, um ein heutiges $|\Omega_0 - 1| < 10$ zu gewährleisten. Schon geringe Abweichungen von der passenden Anfangsdichte würden zu verheerenden Resultaten führen, wie z.B. einer rapiden Expansion und Abkühlung unter 3 K innerhalb der ersten Sekunden [7].

2.3 Relikte-Problem

Zwar kein Problem des Standardmodells an sich, aber dennoch von Belang ist das Relikte-Problem: eine ungewollte Konsequenz vieler GUTs ist die Erzeugung von Relikten im frühen Universum, die dessen Evolution drastisch verändert hätten. Darunter fallen z.B. magnetische Monopole, die bei einer GUT-Symmetriebrechung auf eine $U(1)$ -Gruppe entstehen [6]. Mit einer Masse von 10^{16} GeV und einer Anzahldichte vergleichbar mit der von Baryonen wären sie der dominante Energiebeitrag und hätten längst zum Rekollaps des Universums geführt.

3 Lösung durch beschleunigte Expansion

Eine Möglichkeit, die genannten Probleme zu lösen, besteht darin, eine Phase im *sehr* frühen Universum ($\approx 10^{-32} \text{ s}$) zu fordern, in der – im Gegensatz zum Standardmodell – eine beschleunigte Expansion mit $\ddot{a} > 0$ stattfindet. Dies stellt zugleich die heute verbreitete Definition der *Inflation* dar. In der Zustandsgleichung entspricht dies dem Fall $-1 \leq \alpha < -1/3$. Der Skalenfaktor wächst dabei entweder mit $a \sim t^\gamma$ mit $\gamma = 2/3(1+\alpha) > 1$ oder exponentiell mit $a \sim e^{H_{\text{infl}} t}$ ($H_{\text{infl}} = \text{const}$) für $\alpha = -1$.

3.1 Lösung des Flachheits-Problems

Betrachtet man die zeitliche Ableitung von (2.2),

$$\frac{d}{dt} |\Omega - 1| = \frac{d}{dt} \frac{|k|}{a^2} = -2 |k| \frac{\ddot{a}}{a^3}, \quad (3.1)$$

stellt man fest, dass diese genau für $\ddot{a} > 0$ negativ ist, d.h., eine anfangs vorhandene Krümmung nimmt mit der Zeit ab. Dauert die Epoche der Inflation nur genügend lange an, kann das Universum bis zum Zeitpunkt des Übergangs zum Standardmodell beliebig flach gemacht werden, sodass im Anschluss die Krümmung bis heute nicht allzu stark anwächst (Abb. 1).

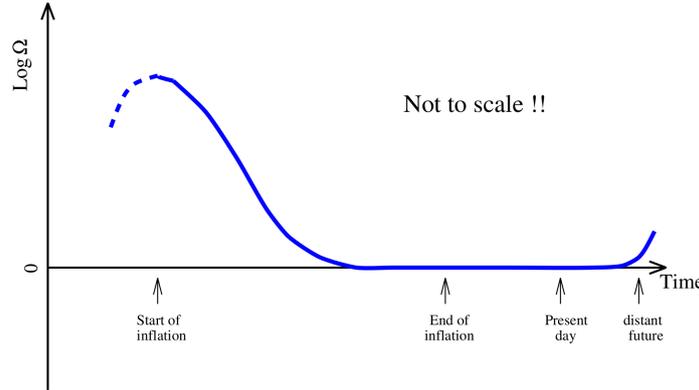


Abbildung 1. Entwicklung der Krümmung während und nach der Inflation; entnommen aus [9]

3.2 Lösung des Horizont-Problems

Das Horizont-Problem ist dann gelöst, wenn sich bis zur Rekombination ein thermisches Gleichgewicht auf einer Längenskala ausbilden konnte, die mindestens so groß ist wie die Strecke, die von den CMB-Photonen bis heute zurückgelegt wurde. Das heißt, es ist nötig, dass

$$a(t_{\text{rec}}) \int_0^{t_{\text{rec}}} \frac{dt}{a(t)} \gg a(t_0) \int_{t_{\text{rec}}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (3.2)$$

Bei Annahme einer exponentiellen Expansion während der Inflation im Zeitraum $t = 0$ bis t_{infl} und daran anschließenden Potenzgesetz-Expansion $a_{\text{CSM}} \sim t^\gamma$ als Näherung für die CSM-Phase lassen sich die beiden Seiten dieser Ungleichung abschätzen [12]:

$$a(t_{\text{rec}}) \int_0^{t_{\text{rec}}} \frac{dt}{a(t)} \geq a(t_{\text{infl}}) \int_0^{t_{\text{infl}}} \frac{dt}{a(t)} \geq H_{\text{infl}}^{-1} e^{H_{\text{infl}} t_{\text{infl}}}, \quad (3.3)$$

$$a(t_0) \int_{t_{\text{rec}}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \leq \int_{t_{\text{rec}}}^{t_0} \frac{dt}{a_{\text{CSM}}(t)} \leq \frac{t_0}{1 - \gamma}. \quad (3.4)$$

Wie oben ist nur eine ausreichend lange Inflationsdauer nötig, um $H_{\text{infl}}^{-1} e^{H_{\text{infl}} t_{\text{infl}}} \gg t_0 / (1 - \gamma)$ zu gewährleisten und somit Ungleichung (3.2) zu erfüllen. In anderen Worten ausgedrückt wird es so ermöglicht, dass Licht vor der Rekombination viel weiter reisen kann als nachher [7]. Genauere Rechnungen zeigen, dass mit mindestens etwa $N = H_{\text{infl}} t_{\text{infl}} \simeq 60$ *e-folds* Horizont- und Flachheitsproblem gelöst werden [6].

3.3 Lösung des Relikte-Problems

Durch das rapide Anwachsen des Skalenfaktors um viele Größenordnungen ($e^{60} \simeq 10^{16}$) werden Relikte, die vor der Inflation produziert wurden, extrem verdünnt. Das Auffinden auch nur eines einzigen Monopols im heute beobachtbaren Universum wird so äußerst unwahrscheinlich. Dabei muss allerdings sichergestellt werden, dass im Verlauf der Inflation oder dem daran anschließenden Reheating (s.u.) keine weiteren erzeugt werden.

4 Feldtheoretische Modelle

Es stellt sich natürlich die Frage, wie ein solches Szenario realisiert werden kann. Dabei ist einerseits eine (fast) konstante, also zeitunabhängige Vakuumdichte nötig, andererseits muss die Inflation nach auch eine zeitlich begrenzte Periode enden und einen Übergang zum Standardmodell ermöglichen. Das bedeutet, die Vakuumenergiedichte muss wieder zerfallen und dabei die „konventionelle“ Materie erzeugen, deren Entwicklung durch das Standardmodell erfolgreich beschrieben wird. Jegliche vorher vorhandene Materie wird durch die Inflation stark ausgedünnt. Bei diesem Vorgang wird das Universum wieder aufgeheizt, weshalb er als *Reheating* bezeichnet wird.

4.1 Dynamik des Inflaton-Feldes

Die meisten gängigen Inflationsmodelle stützen sich auf die Existenz eines skalaren *Inflaton*-Feldes φ mit einem Potential $V(\varphi)$. Zum großen Teil ist dabei eine klassische feldtheoretische Betrachtung zum Verständnis bereits ausreichend. Die Dynamik des Inflaton-Feldes wird beschrieben durch die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - V(\varphi). \quad (4.1)$$

Aus dieser kann sowohl die Bewegungsgleichung des Feldes

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0 \quad (4.2)$$

über den kovarianten Euler-Lagrange-Formalismus mit der FLRW-Metrik als auch der Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu} = (\partial^\mu \varphi)(\partial^\nu \varphi) - \mathcal{L}g^{\mu\nu}$ abgeleitet werden. Der Vergleich mit dem vom idealen Fluid bekannten $T^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p, p, p)$ liefert

$$\rho = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi), \quad p = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - V(\varphi). \quad (4.3)$$

Dabei wurde stillschweigend ein homogenes Feld angenommen und Gradienten vernachlässigt, was bei einer rapiden Vergrößerung des Skalenfaktors eine zulässige Näherung darstellt [12].

Eine beschleunigte Expansion ist damit möglich, wenn $\dot{\varphi}^2 < V(\varphi)$. Eine besondere Vereinfachung ergibt sich, wenn hierbei der kinetische Anteil gegenüber dem potentiellen vernachlässigbar ist, d.h. $\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi)$. In dieser sog. *Slow-Roll-Näherung* ist tatsächlich $\alpha \simeq -1$. Hierbei „rollt“ das Feld langsam ein sehr flaches Potential herab und treibt dabei die Inflation voran. Die *Slow-Roll-Parameter*

$$\epsilon(\varphi) \equiv \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V'(\varphi)}{V(\varphi)} \right)^2, \quad \eta(\varphi) \equiv \frac{1}{8\pi G} \frac{V''(\varphi)}{V(\varphi)} \quad (4.4)$$

müssen für diese Näherung die Bedingungen $\epsilon \ll 1$ bzw. $|\eta| \ll 1$ über einen ausreichend langen Zeitraum erfüllen¹.

4.2 Klassifizierung von Inflationsmodellen

Es existiert eine ganze Reihe von Modellen mit unterschiedlichsten Potentials, die dies leisten können.² Es bietet sich daher an, einige Klassifizierungen vorzunehmen, wobei jedoch anzumerken ist, dass nicht sämtliche Modelle in die folgenden Kategorien eingeordnet werden können.

Zum einen ist eine Unterscheidung bzgl. der Form des Potentials möglich [4, 8]. Hier wird zwischen *large-field*-, *small-field*- und *hybriden* Modellen unterschieden. Bei ersteren ist der anfängliche Feldwert vom Ursprung weg verschoben und es rollt zu diesem hin. Ein Beispiel-Potential ist hier $V \sim \varphi^2$. Bei *small-field*-Modellen erfolgt die Evolution ausgehend von einem instabilen Gleichgewicht bei $\varphi = 0$ aus zu einem Minimum bei größerem Feld, z.B. mit einem Sombbrero-Potential $V \sim (\varphi^2 - \mu^2)^2$, wie es charakteristisch für spontane Symmetriebrechung ist. Bei den hybriden Modellen wird ein weiteres Skalarfeld eingeführt, durch welches das effektive Potential des Inflaton-Feldes beeinflusst wird und sich mit der Zeit ändert.

Zum anderen wird unterschieden nach der Art des Eintritts in die Inflationsphase, der *thermisch* oder *chaotisch* stattfinden kann [10]. Während im thermischen Fall angenommen wird, dass sich noch vor Beginn der Inflation ein thermisches Gleichgewicht gebildet hat, ist dies im chaotischen Fall nicht erforderlich. Hier sind quasi beliebige Anfangsbedingungen erlaubt, die auch räumlich variieren dürfen. Dies stellt die heute verbreitetste Sichtweise dar.

4.3 Reheating

Die Inflation endet, sobald die Slow-Roll-Bedingungen zusammenbrechen und das Feld in die Nähe des Minimums gerollt ist [7, 11]. Dort beginnt es, um dieses herum zu oszillieren, wobei die Expansion des Universums einen Dämpfungsterm darstellt (vgl. (4.2)). In frühen Betrachtungen wird angenommen, dass das homogene Inflaton-Feld durch eine Ansammlung von Inflaton-Teilchen dargestellt werden kann, die unabhängig voneinander zerfallen. Dieser Prozess dauert typischerweise etwa 10^3 Oszillationsperioden an, ist daher eher ineffizient und führt zu einer relativ niedrigen Reheat-Temperatur. Wie später herausgefunden wurde, können kohärente Effekte wie parametrische Resonanzen zu einem wesentlich schnelleren Zerfall des Inflaton-Feldes führen (typischerweise 10^1 bis 10^2 Perioden), wodurch hochenergetische, nicht-thermische Fluktuationen verursacht werden, die für die Baryogenese wichtig sein können [7].

5 Inflation und Beobachtungen

Obwohl die Inflation, falls sie denn tatsächlich stattgefunden hat, nur für winzige Sekundenbruchteile andauerte, sind heute, 14 Milliarden Jahre später, noch „Fußspuren“ sichtbar, die es ermöglichen, Rückschlüsse auf konkrete Modelle zu ziehen. Quantenfluktuationen des Inflaton-Feldes entwickeln sich zu Dichteschwankungen, die als Keime für die spätere Strukturbildung dienen und sich auch in den CMB-Anisotropien niederschlagen (s.u.). Dies ist ein anspruchsvolles Thema, es gibt jedoch

¹siehe z.B. [3, 9] für genauere Zusammenhänge

²Einen Überblick über die Geschichte von Inflationsmodellen liefert z.B. [11].

auch einige anschauliche Erklärungen [3, 8, 12]. Dazu ist zunächst zu bemerken, dass der mitbewegte *Hubble-Horizont* $(aH)^{-1}$ während der Inflation schrumpft. Dieser stellt die Skala dar, ab der die Expansion des Universums relevant wird, wenngleich dies keine harte Grenze wie den kausalen Horizont darstellt. Innerhalb des Hubble-Horizonts können kausale Prozesse ablaufen, ohne stark von der Expansion beeinflusst zu werden. Eine Fluktuation $\delta\varphi$ mit einer mitbewegten Wellenlänge λ kann zunächst innerhalb des Horizonts entstehen. Während λ per definitionem konstant bleibt, schrumpft der mitbewegte Hubbleradius. Es kommt zum *horizon crossing*, bei dem die Fluktuation „einfriert“ und nicht länger kausalen Prozessen unterliegt (Abb. 2). Wenn lange Zeit später in der CSM-Phase die Wellenlänge wieder in den dann wachsenden Hubble-Horizont eintritt, ist aus der Quantenfluktuation eine klassische geworden. Die Feldfluktuationen hängen zusammen mit Störungen der Metrik, von denen es zwei Arten gibt: *skalare* und *Tensor-Störungen* (denkbar wären auch Vektor-Störungen, die in der Mehrzahl der Inflationsmodelle aber nicht erzeugt werden). Skalare Störungen sind verbunden mit Dichteschwankungen, Tensorstörungen mit Gravitationswellen. Sie lassen sich durch Spektren $P_s(k) = A_s (k/k_*)^{n_s-1}$ bzw. $P_t(k) = A_t (k/k_*)^{n_t}$ als Funktionen der mitbewegten Wellenzahl k charakterisieren. Die spektralen Indizes $n_{s/t}$ sind zumindest in der Slow-Roll-Näherung für konkrete Modelle analytisch berechenbar. So gibt es unter anderem Zusammenhänge zu den Slow-Roll-Parametern:

$$1 - n_s = 6\epsilon - 2\eta \quad (5.1)$$

$$r \equiv \frac{A_t}{A_s} = 16\epsilon \quad (5.2)$$

$$n_t = -2\epsilon \quad (5.3)$$

Da die Slow-Roll-Parameter sehr klein sind, werden für die Inflation allgemein fast skaleninvariante Spektren ($n_s \simeq 1$) vorausgesagt. Experimentell zugänglich wurde in den letzten Jahren vor allem das skalare Spektrum mit hoher Genauigkeit durch CMB-Messungen³. In der Tat hat Planck ein derartiges Spektrum mit $n_s = 0,968(6)$ gemessen [2] und es wird möglich, konkrete Modelle zu testen und ggf. auszuschließen (Abb. 3).

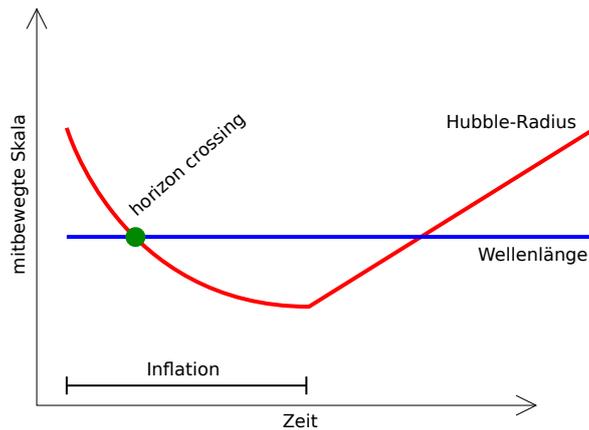


Abbildung 2. Einfrieren der Inflation-Feld-Fluktuation beim horizon crossing

³für eine musikalische Umsetzung siehe [5]

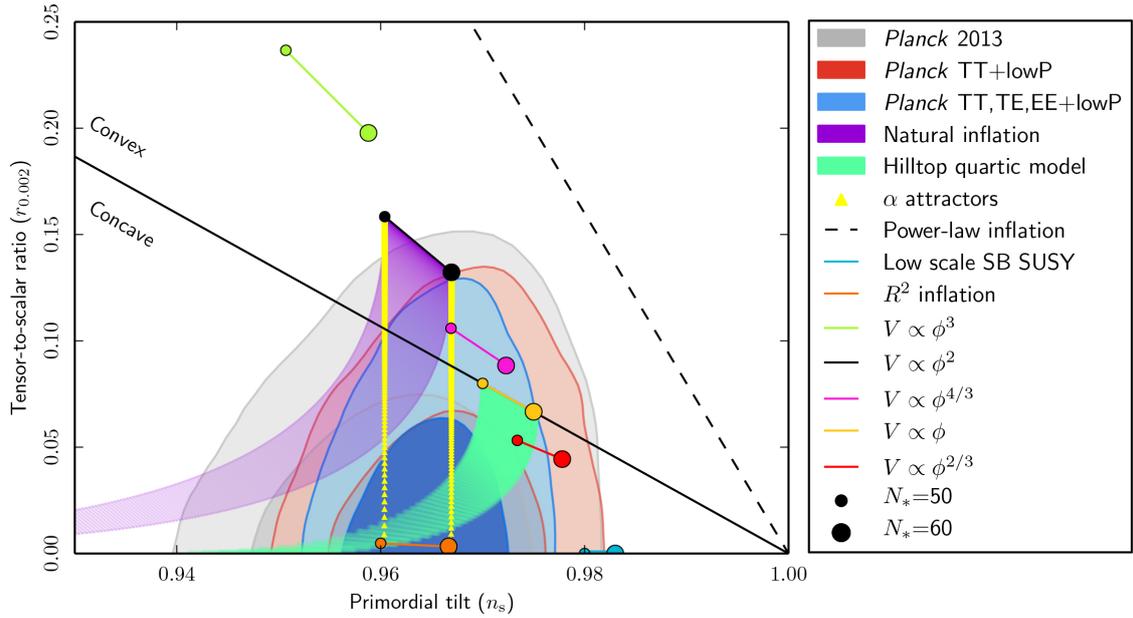


Abbildung 3. 68%- und 95%-CL-Bereiche für n_s und r und Vorhersagen aus verschiedenen Modellen; entnommen aus [2]

Literatur

- [1] P. A. R. Ade u. a. (Planck Collaboration), „Planck 2015 results. XIII. Cosmological Parameters“, (2015), [arXiv:1502.01589](https://arxiv.org/abs/1502.01589) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/archive/astro)].
- [2] P. A. R. Ade u. a. (Planck Collaboration), „Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation“, (2015), [arXiv:1502.02114](https://arxiv.org/abs/1502.02114) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/archive/astro)].
- [3] D. Bailin und A. Love, *Cosmology in gauge field theory and string theory* (IOP Publishing, 2004).
- [4] B. A. Bassett, S. Tsujikawa und D. Wands, „Inflation dynamics and reheating“, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 537–589 (2006) DOI: [10.1103/RevModPhys.78.537](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.78.537), [arXiv:astro-ph/0507632](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0507632) [[astro-ph](https://arxiv.org/archive/astro)].
- [5] T. Blais (A Capella Science), *The Surface of Light*, (2015) <https://www.youtube.com/watch?v=2INJiNpZFBI>.
- [6] J. L. Cervantes-Cota, „An Introduction to Standard Cosmology“, in *The Early Universe and Observational Cosmology*, hrsg. von N. Bretón, J. L. Cervantes-Cota und M. Salgado (Springer, 2004), S. 7–51, DOI: [10.1007/978-3-540-40918-2_2](https://doi.org/10.1007/978-3-540-40918-2_2).
- [7] E. J. Copeland, „Inflation – In the Early Universe and Today“, in *The Early Universe and Observational Cosmology*, hrsg. von N. Bretón, J. L. Cervantes-Cota und M. Salgado (Springer, 2004), S. 53–107, DOI: [10.1007/978-3-540-40918-2_3](https://doi.org/10.1007/978-3-540-40918-2_3).
- [8] W. H. Kinney, „TASI Lectures on Inflation“, (2009), [arXiv:0902.1529](https://arxiv.org/abs/0902.1529) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/archive/astro)].

- [9] A. R. Liddle, „An introduction to cosmological inflation“, in *High energy physics and cosmology. Proceedings, Summer School, Trieste, Italy, June 29-July 17, 1998* (1999), S. 260–295, [arXiv:astro-ph/9901124](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9901124) [[astro-ph](#)].
- [10] A. R. Liddle und D. H. Lyth, „The Cold dark matter density perturbation“, *Phys. Rept.* **231**, 1–105 (1993) DOI: [10 . 1016 / 0370 - 1573\(93 \) 90114 - S](https://doi.org/10.1016/0370-1573(93)90114-S), [arXiv:astro-ph/9303019](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9303019) [[astro-ph](#)].
- [11] A. Linde, „Inflationary Cosmology after Planck 2013“, in *Post-Planck Cosmology: Lecture Notes of the Les Houches Summer School* (2015), S. 231–316, DOI: [10 . 1093 / acprof : oso/9780198728856.003.0006](https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198728856.003.0006), [arXiv:1402.0526](https://arxiv.org/abs/1402.0526) [[hep-th](#)].
- [12] G. S. Watson, „An Exposition on Inflationary Cosmology“, (2000), [arXiv:astro-ph/0005003](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0005003) [[astro-ph](#)].