

Beschleunigte Expansion des Universums und Dunkle Energie

Handout zum Vortrag
Seminar Kosmologie und Teilchenphysik

Markus Kurbel

25.01.2016

markus.kurbel@tu-dortmund.de

Inhaltsverzeichnis

- 1 Einführung** **1**

- 2 Experimentelle Hinweise** **2**
 - 2.1 Typ Ia Supernovae 2
 - 2.2 Anisotropie des kosmischen Mikrowellenhintergrundes 3
 - 2.3 Akustische Baryonen Oszillation 3

- 3 Theoretische Beschreibung** **6**
 - 3.1 Kosmologische Konstante 6
 - 3.2 Quintessenz 7

- 4 Fazit** **8**

Literaturverzeichnis⁹

1 Einführung

Die bemerkenswerte Tatsache der beschleunigten Expansion des Universums wurde auf experimenteller Ebene durch diverse Messungen bestätigt. Die theoretische Beschreibung dieses Sachverhaltes verbleibt jedoch ein Rätsel. Das vorliegende Dokument soll einen Überblick über die Thematik der beschleunigten Expansion des Universums geben, indem zum einen auf die experimentellen Hinweise auf die beschleunigte Expansion eingegangen wird und zum anderen die möglichen theoretischen Beschreibungen dieses Phänomens kurz erläutert werden.

Um die experimentellen Ergebnisse des nächsten Kapitels verstehen zu können, sei nun ein kurzer Vorgriff auf ein mögliches Modell gegeben. Dabei handelt es sich um das Λ CDM Modell, welches trotz seiner Einfachheit, Beobachtungen, wie die beschleunigte Expansion, die large-scale structure des Universums, sowie die Anisotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung erklären kann.

Ausgangspunkt dieses Modells ist die Homogenität und Isotropie des Universums. Daraus folgt, dass die Dynamik des Raumes auf großen Skalen nur von einem Parameter $a(t)$ abhängen kann. Daraus resultiert die Robertson-Walker Metrik:

$$ds^2 = a(t)^2 dx^2 - c^2 dt^2. \quad (1)$$

Löst man die Einsteinschen Feldgleichungen

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2)$$

mit dem Ricci Tensor/Skalar $R_{\mu\nu}/R$, dem metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$, der kosmologischen Konstanten Λ , der Einsteinschen Gravitationskonstanten G und dem Energie-Impuls Tensor $T_{\mu\nu}$, erhält man unter der Annahme der Robertson-Walker Metrik und dem Energie-Impuls Tensor einer perfekten Flüssigkeit die Friedmann Gleichungen

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i - \frac{k}{a(t)^2} \quad (3)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \sum_i (\rho_i + 3p_i). \quad (4)$$

Der Faktor k gibt hier die Krümmung der Raumzeit an, wobei das Universum mit $k = 1$ sphärisch, mit $k = 0$ flach und mit $k = -1$ hyperbolisch wäre. Der Index i läuft über die verschiedenen Energiekonstituenten des Universums.

Für ein perfektes Fluid gilt die Zustandsgleichung

$$p_i = w_i \rho_i \Rightarrow p_i \sim a^{-3(1+w_i)}, \quad (5)$$

womit sich Gleichung (3) wie folgt darstellen lässt:

$$\frac{H(t)^2}{H_0^2} = \Omega_R a^{-4} + \Omega_M a^{-3} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_\Lambda a^{-3(1+w)}, \quad (6)$$

wobei $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ die Hubblekonstante ist. Die Parameter $\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_{crit}}$ repräsentieren die, wie oben erwähnt, Energiekonstituenten des Universums normiert auf die kritische Dichte $\rho_{crit} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$ (R: Strahlung, M: Materie, k: Krümmung, Λ : Dunkle Energie). Hierbei ist Ω_Λ eine neue Form der Energie, für die gilt $p = -\rho$.

Durch die Parameter Ω_i lassen sich somit Rückschlüsse auf die Zusammensetzung des Universums, sowie deren Auswirkung auf die Dynamik der Raumzeit schließen.

2 Experimentelle Hinweise

Die Annahme eines statischen Universums konnte durch Hubbles Entdeckung 1929 falsifiziert werden, worin er zeigen konnte, dass sich je weiter eine Galaxie entfernt ist, desto schneller entfernt sie sich. Die Idee des expandierenden Universums hatte sich bewährt. Die in den letzten zwei Jahrzehnten durchgeführten Messung konnten darüber hinaus nachweisen, dass es sich sogar um eine beschleunigte Expansion handelt. Diese Experimente sollen in diesem Kapitel näher beleuchtet werden.

2.1 Typ Ia Supernovae

Die Typ Ia Supernovae zeichnen sich durch ihre spektralen Eigenschaften aus, welche bei fast allen Supernovae dieses Typs identisch sind und daher als Standardkerze in der Messung kosmologischer Distanzen eine entscheidende Rolle spielen. Ihre Lichtkurven werden durch den radioaktiven Zerfall von ^{56}Ni und ^{56}Co erzeugt und deren Maximum hängt hauptsächlich von der bei der Explosion erzeugten ^{56}Ni Masse, welche bei voll ausgebrannten weißen Zwergen zu $\approx 0.6M_\odot$ angenommen wird. Dabei erreicht die Lichtkurve ca. 15-20 Tage nach der Explosion ein Maximum der absoluten Helligkeit, welche innerhalb eines Monats um einen festen Wert abnimmt [1]. Da kosmologische Distanzen von der Robertson-Walker Metrik und somit vom Skalenfaktor $a(t)$ abhängen, können über Gleichung (6) Rückschlüsse auf die Parameter Ω_i gezogen werden. Das Entfernungsmodul ist definiert als:

$$\mu = m - M = 5 \log(d_L(z, \Omega_M, \Omega_\Lambda, w)) + K_{ij}, \quad (7)$$

mit der absoluten M und gemessenen Helligkeit m , der Leutkraftentfernung d_L und der rotverschiebungsabhängigen K-Korrektur, welche vom spektralen Fluss F_ν abhängt

$$\text{Wenn } F_\nu \sim \nu^{-\alpha}, \text{ dann } K_i(z) = 2.5(\alpha - 1) \log(1 + z_i) \quad (8)$$

Die Absolute Helligkeit muss aufgrund der Fluktuationen der Typ Ia Supernovae Lichtkurven mithilfe der Phillips Beziehung

$$M_{max} = -19.504 + 0.736\Delta m_{15} + 0.182\Delta m_{15} \quad (9)$$

normiert werden. Dabei sind M_{max} das Maximum der Lichtkurve und Δm_{15} dessen Helligkeitsabfall nach 15 Tagen. Misst man nun μ gegen z lassen sich die kosmologischen Parameter Ω_i beschränken [1], was Abbildung 1 anhand eines Beispiels entnommen werden kann. Hier konnte gezeigt werden, dass weit entfernte Supernovae dunkler erscheinen als bei einem negativ beschleunigt expandierenden Universum.

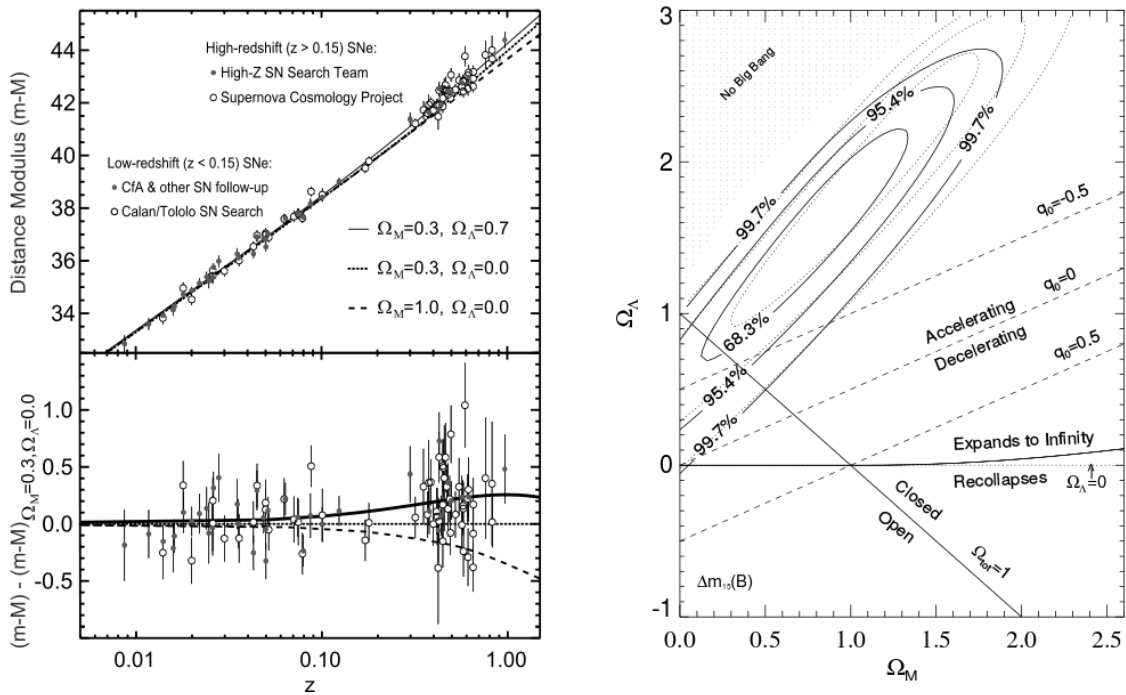


Abbildung 1: Links: Hubble Diagramm der SNe Ia Messungen von HZT und SCP. Rechts: $\Omega_M - \Omega_\Lambda$ Parameterraum, entnommen aus [1]

2.2 Anisotropie des kosmischen Mikrowellenhintergrundes

Der kosmische Mikrowellenhintergrund (CMB) besteht aus den Photonen, welche sich nach der Rekombination frei durch das Universum bewegen konnten. Diese Photonen tragen somit unter anderem die Information, wie das Universum gekrümmt ist (siehe k in Kapitel 1). Daraus lassen sich über Gleichung (6) die Energiedichten entsprechend einschränken. Die Multipolentwicklung und somit den Grad der Anisotropie des CMB lässt sich aus Abbildung 2 entnehmen. Die resultierenden Einschränkungen auf den Ω_i Parameterraum ist in Abbildung 4 zu sehen. Hier ist ebenfalls erkennbar, dass sich der erlaubte Parameterraum stark an der Linie, welche ein die Parameter eines flaches Universums, orientiert.

2.3 Akustische Baryonen Oszillation

Die akustische baryonische Oszillation bezeichnet die Dichtefluktuationen, welche sich im primordialen Plasma, aufgrund des Wechselspiels von gravitativer Anziehung und dem nach aussen gerichtetem Strahlungsdruck ergab. Zum Zeitpunkt der Rekombination fiel der Strahlungsdruck aus, wodurch die Oszillation beendet wurde und eine Anisotropie der Dichteverteilung bestehen blieb. Daraus resultiert ein signifikanter Peak in der Zwei-Punkt Korrelationsfunktion $\xi(r)$ zweier Galaxien bei $r \sim 110 h^{-1}$ Mpc, was ungefähr der Distanz entspricht, bei welcher eine akustische Welle im primordialen Plasma, zum Zeitpunkt der Entkopplung, anhält. Dieser Peak ist in Abbildung 3 zu sehen. Dies

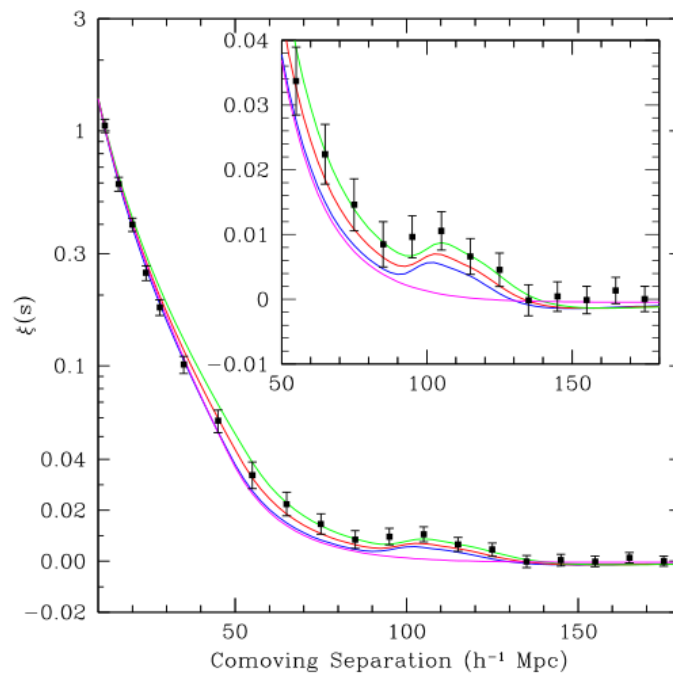


Abbildung 3: Von SDSS gemessene Zwei-Punkt Korrelationsfunktion $\xi(r)$ zweier Galaxien, entnommen aus [1]

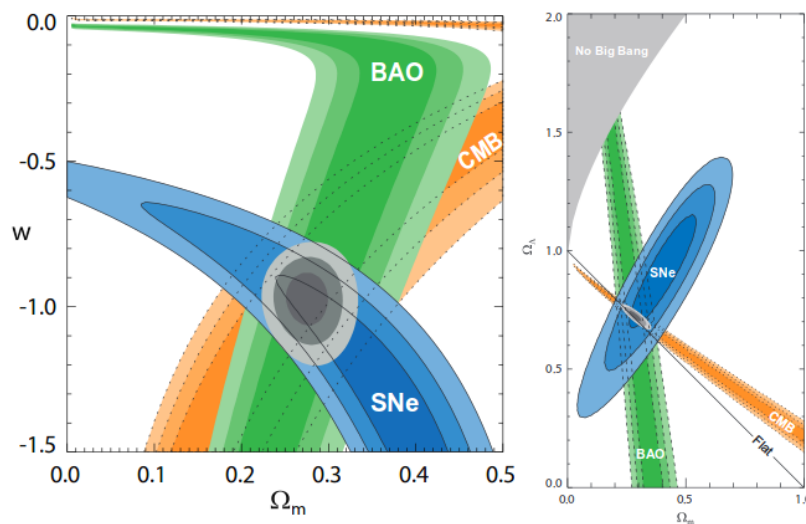


Abbildung 4: Kombinierte Constrains aus den oben genannten Phänomenen, entnommen aus [1]

3 Theoretische Beschreibung

Die in Kapitel 2 erklärten, beobachtbaren Phänomene, sollen nun in durch zwei Beispielmole theoretisch beschrieben werden.

3.1 Kosmologische Konstante

Der wohl einfachste und in Kapitel 1 bereits diskutierte Ansatz um eine beschleunigte Expansion des Universums zu erhalten ist die Einführung einer kosmologischen Konstanten in die Einsteinschen Feldgleichungen. Die erfolgte durch den Zusatzterm $\Lambda g_{\mu\nu}$ in Gleichung (2).

Betrachtet man dies jedoch quantenfeldtheoretisch ergibt sich ein Problem, da für den Energie-Impuls Tensor gilt

$$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle = -\rho_{vac}g_{\mu\nu}, \quad (11)$$

mit der Vakuumenergiedichte ρ_{vac} [2].

Des weiteren muss für ein beliebiges skalares Feld ϕ gelten

$$S_\phi = - \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + V(\phi) \right], \quad (12)$$

wobei $V(\phi)$ dessen Potential ist. Der Energie-Impuls Tensor ist dann

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V(\phi) \right], \quad (13)$$

woraus sich ein Minimum (Vakuumenergie) wie folgt ergibt

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = -V(\phi_{min})g_{\mu\nu}. \quad (14)$$

Daraus folgt nun, dass die Vakuumenergie zwei unterschiedliche Quellen hat, zum einen die Klassische (14) und die Quantenmechanische (13) [2]. Die kosmologische Konstante lässt sich also schreiben als

$$\Lambda_{eff} = \Lambda_B + \kappa \rho_{vac}, \quad (15)$$

wobei sich ρ_{vac} zusammensetzt aus

$$\begin{aligned} \rho_{vac} &= \frac{1}{2} \sum_{Felder} \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d^3k \sqrt{k^2 + m^2} \\ &\approx \sum_{Felder} \frac{g_i k_{cut}^4}{16\pi^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Dies würde bedeuten, dass bei $k_{cut} \sim 10^{19}$ GeV Λ_B mit extremer Genauigkeit ρ_{vac} vernichten müsste, was unnatürlich wäre. Das nennt man das Problem der kosmologischen Konstanten, wobei eine mögliche Lösung des Problems SUSY wäre, wo die Konstituenten von ρ_{vac} in Gleichung (16) sich durch ihre jeweiligen Superpartnerbeiträge auslöschen.

3.2 Quintessenz

Eine weitere Gruppe von Modellen zur Beschreibung der beschleunigten Expansion des Universums werden Quintessenzmodelle genannt [3]. Hierbei sind die Quintessenzen kanonische skalare Felder ϕ . Die Wirkung ergibt sich dann zu

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} M_{pl}^2 R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] + S_m, \quad (17)$$

mit der reduzierten Planck Masse M_{pl} und der Massenwirkung S_m . Der Zustandsparameter von ϕ ist somit

$$w = \frac{P_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}/2 - V(\phi)}{\dot{\phi}/2 + V(\phi)}. \quad (18)$$

Das skalare Feld erfüllt natürlich die Kontinuitätsgleichung, also

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi}. \quad (19)$$

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich aus der Wirkung zu

$$3M_{pl}^2 H^2 = \dot{\phi}^2/2 + V(\phi) + \rho_m \quad (20)$$

$$2M_{pl}^2 \dot{H} = - \left[\dot{\phi}^2 + (1 + w_M) \rho_m \right]. \quad (21)$$

Um einen besseren Überblick zu generieren empfiehlt es sich die folgenden dimensionslosen Variablen zu definieren

$$x = \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6} M_{pl} H}, \quad y = \frac{\sqrt{V(\phi)}}{\sqrt{3} M_{pl} H}. \quad (22)$$

Damit lässt sich der kosmologische Parameter umschreiben zu $\Omega_\phi = \rho_\phi / (3M_{pl}^2 H^2) = x^2 + y^2$. Die Ableitungen der neu eingeführten Parameter nach $\ln(a)$ ist

$$\frac{dx}{d(\ln(a))} = -3x + \frac{\sqrt{6}}{2} \lambda y^2 + \frac{3}{2} x [(1 - w_m) x^2 + (1 + w_m)(1 - y^2)] \quad (23)$$

$$\frac{dy}{d(\ln(a))} = -\frac{\sqrt{6}}{2} \lambda x y + \frac{3}{2} y [(1 - w_m) x^2 + (1 + w_m)(1 - y^2)]. \quad (24)$$

mit $\lambda = -M_{pl}/V \cdot dV/d\phi$, woraus sich für konstantes λ ein exponentielles Potential ergibt

$$V(\phi) = V_0 e^{-\lambda\phi/M_{pl}}. \quad (25)$$

Sucht man die Nullstellen des Gleichungssystems (23) und (24) findet man vier Fixpunkte für das Modell:

- (a) $(x, y) = (0, 0)$, $\Omega_\sigma = 0$, $w_{eff} = w_M$, w ist nicht definiert

- (b) $(x,y) = (\pm 1,0)$, $\Omega_\sigma = 0$, $w_{eff} = w = 1$.
- (c) $(x,y) = (\lambda/\sqrt{6}, \sqrt{1-\lambda^2/6})$, $\Omega_\sigma = 0$, $w_{eff} = w = -1 + \lambda^2/3$.
- (d) $(x,y) = (\sqrt{3/2}(1+w_m)/\lambda, \sqrt{3(1-w_m^2/2\lambda^2)})$,
 $\Omega_\sigma = 3(1+w_M)/\lambda^2$, $w_{eff} = w = w_M$.

Der effektive Zustandsparameter w_{eff} ist definiert als

$$w_{eff} = -1 - 2\dot{H}/(3H^2) \quad (26)$$

Das materiedominierte Universum ($w_{eff} \sim 0$, $\Omega_\sigma \ll 1$) kann mit $w_m = 0$ aus (a) gewonnen werden. Darüber hinaus kann (a) ebenfalls für das strahlungsdominierte Universum mit $w_m = 1/3$ realisieren. Unter der Bedingung $\lambda < 2$ lässt sich aus (c) eine Epoche der kosmischen Expansion konstruieren. Um nun ein vollständiges Modell für die unterschiedlichen Epochen des Universums zu finden, muss es einen Übergang zwischen (a) zu (c) geben. Um deren Stabilität zu prüfen kann man die Eigenwerte der Hesse Matrix zu Rate ziehen. Dabei ergibt sich, dass Lösung (a) für $0 \leq w_m \leq 1$ also für $\lambda^2 < 2$ ein Sattelpunkt ist, welche in (c) übergehen kann.

Dies ist nur die Grundidee einer ganzen Reihe von Quintessenzmodellen (unterschiedliche $V(\phi)$ und/oder $\lambda \neq const.$), welche durch gewisses fine-tuning in der Lage sind zeitliche Entwicklung des Universums zu beschreiben.

4 Fazit

Der Nachweis, dass das Universum beschleunigt expandiert gehört wohl zu den Bedeutendsten in der Kosmologie. Dieses Papier stellte einen Überblick über die experimentellen Hinweise auf die beschleunigte Expansion des Universums, sowie über zwei Modelle, welche diese Beobachtungen reproduzieren sollen, dar. Es wurde gezeigt, dass aus der Anisotropie des CMB ein quasi flaches Universum folgt. Die Typ Ia Supernovae als Standardkerze und die akustische baryonische Oszillation als Definition eines Standardlineal gaben weitere Einschränkungen auf die kosmischen Parameter und zeigten somit, dass das Universum beschleunigt expandiert.

Durch das Λ CDM Modell wurde das Modell vorgestellt, welches die aktuellen Messungen am besten reproduziert, jedoch durch das Problem der kosmologischen Konstanten ein fundamentales Problem aufweist. Dies soll durch Modelle wie die Quintessenzmodelle umgangen werden, um ein volles Verständniss für das Universum zu erlangen.

Literatur

- [1] J. A. Frieman, “Lectures on Dark Energy and Cosmic Acceleration,” in American Institute of Physics Conference Series, P. Pellegrini, S. Dafflon, J. S. Alcaniz, and E. Telles, eds., vol. 1057 of American Institute of Physics Conference Series, pp. 87–124. Sept., 2008. [arXiv:0904.1832](#) [astro-ph.CO].
- [2] J. Martin, “Everything You Always Wanted To Know About The Cosmological Constant Problem (But Were Afraid To Ask),” Comptes Rendus Physique **13** (2012) 566–665, [arXiv:1205.3365](#) [astro-ph.CO].
- [3] S. Tsujikawa, “Quintessence: A Review,” Class. Quant. Grav. **30** (2013) 214003, [arXiv:1304.1961](#) [gr-qc].