Das Universum als Computer

TU Dortmund, Fakultät Physik
Seminar Kosmologie und Teilchenphysik

Tobias Büscher

tobias.buescher@tu-dortmund.de

04.01.2016

Inhaltsverzeichnis

1 Quantencomputer

Quantencomputer sind ein hochaktuelles Forschungsgebiet der Physik. Sie versprechen vielfältige Anwendungen, die klassische Computer nicht oder nicht effizient leisten können. Wesentliche Herausforderungen bei ihrer technischen Umsetzung sind Dekohärenz durch den Einfluss der Umgebung und die Skalierbarkeit auf große Systeme.

1.1 Grundlagen Quantencomputer

Zur Konstruktion eines Quantencomputer wird ein physikalisches Zwei-Zustandssystem benötigt. Dieses lässt sich mathematisch darstellen als:

$$|\Psi\rangle = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle . \tag{1.1}$$

Dies stellt die elementare Informationseinheit im Quantencomputer dar, analog zum Bit im klassischen Computer. Daher wird dieses als Qubit bezeichnet. Im Gegensatz zum Bit kann dieses sich nicht nur in den Zuständen $|1\rangle$ und $|0\rangle$ befinden, sondern auch in Überlagerungen aus diesen, dargestellt durch die komplexen Vorfaktoren c_0 und c_1. Daher kann ein Quantencomputer quantenmechanische Effekte wie Superposition und Verschränkung nutzen. Die n Qubits einen Quantencomputers werden im Quantenregister zusammengefasst, welches mathematisch durch einen 2^n-dimensionalem Hilbertraum beschrieben wird.
Ob sich ein bestimmtes physikalisches System nutzen lässt, wird anhand der DiVincenzo-Kriterien[1] beurteilt. Die Qubits müssen klar charakterisiert sein, d. h. es muss klar sein, was genau ein Qubit darstellt und wie viele Qubits sich im Quantenregister befinden. Es muss möglich sein, eine beliebige Anzahl von Qubits zu nutzen, was als Skalierbarkeit bezeichnet wird. Um Rechnungen durchführen zu können muss ein universelles Set an Quantengattern existieren, um das Quantenregister in jeden beliebigen Zustand bringen zu können. Quantengatter sind steuerbare Wechselwirkungen, im Gegensatz zu klassischen Bauelementen wie Transistoren, mit denen Logikgatter realisiert werden. Die Dekohärenzzeit des Systems muss hoch genug sein, um genügend Quantengatter für eine Rechnung auf dem Quantencomputer anzuwenden. Dekohärenz bezeichnet den Einfluss, den die Umgebung auf das System nimmt. Dabei werden die quantenmechanischen Effekte beeinflusst, was dazu führt, dass sich der Quantencomputer wie ein klassischer Computer verhält. Die Kontrolle dieses Einflusses stellt eines der größten technischen Probleme bei der Konstruktion eines Quantencomputers dar. Desweiteren muss das System in einen klar definierten Anfangszustand gebracht werden können und am Ende der Rechnung muss der Quantencomputer ausgelesen werden können.

1.2 Anwendungen und Umsetzungen

Quantencomputer bieten die Möglichkeit, Probleme substantiell schneller zu lösen. So kann beispielsweise mittels des Shor-Algorithmus die Faktorisierung einer Zahl in polynomieller Laufzeit in der Zahl der Ziffern gelöst werden, wohingegen ein klassischer

Computer mit den besten aktuellen Algorithmen lediglich eine subexponentielle Laufzeit ermöglicht. Aktuelle Verschlüsselungen bauen darauf auf, dass große Zahlen nicht effizient faktorisiert werden können, weshalb Quantencomputer hier großen Einfluss haben könnten. Ein weiteres Beispiel ist der Grover-Algorithmus zur Suche in großen Datenmengen. Aus physikalischer Sicht ist die Simulation quantenmechanischer Systeme interessant, welche auf klassischen Computern nicht effizient simuliert werden können, da diese exponentiellen Rechenaufwand in der Systemgröße benötigen. So kann beispielsweise in einem adiabatischen Quantencomputer ein bekanntes System langsam in das gesuchte überführt werden und dieses anschließend gemessen werden.
Aktuelle Forschung untersucht verschiedene Systeme zur Konstruktion eines Quantencomputers. Von besonderem Interesse sind dabei ionisierte Moleküle in einer Ionenfalle, wobei das Qubit beispielsweise durch zwei Hyperfeinniveaus realisiert wird. Mittels Lasern und Magneten können die Qubits manipuliert und ausgelesen werden. Ein weiteres System von Interesse sind Supraleiter, wobei die Qubits durch den Zustand kleiner supraleitender Schaltkreise realisiert werden. Darüberhinaus existieren zahlreiche weitere Projekte mit unterschiedlichsten physikalischen Systemen als Grundlage.

2 Das Universum als Quantencomputer

Eine teils philosophisch motivierte Frage, die sich bei der Betrachtung des Universums stellt, ist, ob das Universum lediglich ein großer Computer ist. Dazu werden Computer im Sinne von Turing betrachtet, der einen universellen Computer als Maschine definiert, welche eine gewünschte Sequenz von logischen Operationen ausführen kann. Die Frage, ob das Universum ein Computer ist oder als solcher betrachtet werden kann lässt sich dann als zwei Teilfragen formulieren:

1. Kann das Universum Rechnungen im Sinne von Turing ausführen?
2. Kann die Dynamik des Universums effizient durch einen Computer berechnet werden?

Da der Mensch in der Lage ist, Computer zu bauen ist die intuitive Antwort zu 1) ja. Hier bleibt die Frage nach unbegrenztem Speicher offen, was allerdings angesichts der Größe des Universums nicht allzu problematisch ist. Die Antwort zu 2) ist komplizierter. Zwar ist es möglich, physikalische Gesetze auf Computern zu simulieren, es ist allerdings unklar, ob dies effizient geschehen kann. Die bekannten physikalischen Gesetze sind lokal, homogen und isotrop. Die äquivalente Computerversion davon ist ein zellularer Automat. Dieser besteht aus einzelnen Zellen, welche eine endliche Zahl an Zuständen annehmen können. Jede Zelle wird in Abhängigkeit ihrer Nachbarzellen in jedem Zeitschritt geupdatet. Daher kann die Frage, ob das Universum ein Computer ist, neu formuliert werden als die Frage, ob das Universum ein zellularer Automat ist.
Diese Frage lässt sich unter Berücksichtigung der Quantenmechanik mit "Nein" beantworten. Der Grund dafür liegt in dem Phänomen der Verschränkung. Dabei lässt sich der Zustand eines physikalischen Systems aus zwei oder mehr Untersystemen nicht mehr als reine Kombination dieser schreiben, sondern kann nur durch einen gemeinsamen Zustand

dargestellt werden. Daher sind die Messergebnisse an den Untersystemen nicht mehr unabhängig voneinander, sondern korreliert. Diese Korrelationen können nicht durch lokale, verborgene Variablen beschrieben werden. Daher können diese auch nicht durch lokale Computermodelle wie zellularen Automaten beschrieben werden. Das Universum kann daher nicht als klassischer Computer betrachtet werden.
Es tut sich daher die Frage auf, ob das Universum folglich als Quantencomputer betrachtet werden kann. Dass diese quantenmechanische Systeme effizient simulieren können, wurde bereits in 1 dargelegt. Daher kann ein Quantencomputer auch jedes System simulieren, dass sich durch lokale Interaktionen entwickelt, wie beispielsweise das Standardmodell. Somit kann die Frage, ob ein Quantencomputer die Dynamik des Universums effizient simulieren kann, mit "Ja" beantwortet werden.
Die Betrachtung des Universums als Quantencomputer beinhaltet eine Antwort auf die Frage, warum das Universum so komplex ist, obwohl doch die Physik vergleichsweise simpel ist. Die bekannten physikalischen Gesetze können in kurzer Weise niedergeschrieben werden. Gleichzeitig können einfachste Algorithmen komplexe Strukturen erzeugen, beispielsweise die Berechnung von π. Daher können Quantenfluktuationen im frühen Universum die zufälligen Informationen bereitstellen, die nötig sind, um so komplexe Strukturen, wie sie das Universum beinhaltet, zu erzeugen.

3 Rechenkapazität des Universums

In diesem Kapitel sollen durch einfache thermodynamische und kosmologische Überlegungen Abschätzungen für die Anzahl an Bits und Operationen, die das Universum ausgeführt haben kann, abgeleitet werden. Mit diesen Abschätzungen kann eine Vorstellung gewonnen werden, wie viel Rechenkapazität nötig ist, um das Universum oder einen Teil davon zu simulieren.

3.1 Anzahl Operationen

Das Margolus-Levitin Theorem liefert folgende Gleichung für die Zeit, die ein System benötigt, um in einen orthogonalen Zustand in Abhängigkeit von der Energie E zu wechseln:

$$\Delta t = \frac{\hbar\pi}{2E}. \tag{3.1}$$

In der materiedominierten Phase des Universums ist die Energie pro Volumen im Wesentlichen durch die in diesem befindliche Materie gegeben. Daher kann die Anzahl der Operationen N_{O} durch Berechnung der Energie der Materie im Universum abgeschätzt werden zu:

$$N_{\mathrm{O}} = \frac{2E}{\hbar\pi} t_{\mathrm{U}} = \frac{2V_{\mathrm{U}}\rho c^2}{\hbar\pi} = \frac{8}{3\hbar}\rho c^5 t_{\mathrm{U}}^4 \approx 10^{121}. \tag{3.2}$$

Im strahlungsdominierten Universum ist der Skalenfaktor a proportional zu $\sqrt{t}$. Da die Wellenlänge der Strahlung mit dem Skalenfaktor wächst, besitzt die Energie der

Strahlung die selbe Zeitabhängigkeit. Die Anzahl der Operationen, die in einem Volumen V mit Energie E ausgeführt werden konnten ist daher gegeben als:

$$N_{\mathrm{O}} = \frac{2E}{\hbar\pi}\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\frac{t_1}{t}}\mathrm{d}t = \frac{4E}{\hbar\pi}(t_1 - \sqrt{t_1 t_0}). \tag{3.3}$$

Es können also bei gleicher Energie und gleicher Zeit maximal doppelt so viele Operationen in einem Volumen durchgeführt worden sein wie im materiedominierten Universum.

3.2 Anzahl Bits

Information, gemessen in Bits, ist gegeben durch:

$$I = \frac{S}{k_{\mathrm{B}}\ln(2)}. \tag{3.4}$$

Die maximale Entropie S, wenn alle Materie in Strahlung umgewandelt ist, lässt sich mithilfe der Formel für Schwarzkörperstrahlung:

$$\rho c^2 = \frac{\pi^2}{30\hbar^3 c^3}(k_{\mathrm{B}}T)^4\sum_l n_l \tag{3.5}$$

und der für die maximale Entropie pro Volumen:

$$\frac{S}{V} = \frac{4\rho c^2}{3T} \tag{3.6}$$

berechnen zu:

$$S = \frac{4k_{\mathrm{B}}}{3}\left(\frac{\pi^2\sum_l n_l}{30}\right)^{1/4}\left(\frac{\rho c}{\hbar}\right)^{1/4} V. \tag{3.7}$$

Diese hängt nur schwach von der Anzahl l an effektiv masselosen Teilchen und deren Anzahl an Freiheitsgraden n_l ab. Unter Vernachlässigung dieses Terms und mit einer simplen Abschätzung für das Volumen sowie Vernachlässigung von dimensionslosen Vorfaktoren lässt sich I berechnen zu:

$$I \approx (\rho c^5 t^4)^{3/4} \approx 10^{90}\ \text{Bits}. \tag{3.8}$$

Im strahlungsdominierten Universum kann die Anzahl Bits direkt angegeben werden, da bereits ein Zustand maximaler Entropie vorliegt:

$$I = S/k_{\mathrm{B}}\ln(2) = \frac{4E}{3\ln(2)k_{\mathrm{B}}T} = \frac{4E}{3\ln(2)}N_{\mathrm{O}}^{3/4}\left(\frac{\pi^2}{30}\sum_l n_l\right)^{1/4}. \tag{3.9}$$

Solange die Temperatur unter der der großen Vereinigung liegt kann diese Formel genähert werden als $N_{\mathrm{O}}^{3/4}$, wie im materiedominierten Universum.

4 Ein Modell für Quantengravitation aus Quantencomputern

In [4] versucht Loyd ein Modell für Quantengravitation basierend auf Quantencomputern zu bauen. Dessen grober Aufbau soll hier skiziert werden.
Zunächst wird die Rechengeschichte definiert. Dazu werden Quantengatter als Vertices betrachtet, welche Interaktionen zwischen Qubits beschreiben und die gerichteten Kanten zwischen Vertices als Drähte, die den Weg von Information beschreiben. Abhängig vom Zustand der einlaufenden Qubits können diese an einem Quantengatter entweder transformiert werden oder nicht. Die gesamte Rechnung ist dann eine Überlagerung von Rechenverläufen, welche die unterschiedlichen Möglichkeiten, ob Qubits an den Quantengattern transformiert wurden oder nicht darstellen. Die Quantengatter werden als Exponentiale von Projektionsoperatoren P geschrieben:

$$U = e^{-i\Theta P} = P(0) + e^{-i\Theta} P(1). \tag{4.1}$$

Dabei erhalten Zustände im Eigenraum zum Energieeigenwert 1 eine Phase Θ. Die gesamte Rechnung mit n Quantengattern lässt sich dann als Überlagerung einzelner Rechenverläufen C_b schreiben:

$$U_n \dots U_1 = \sum_{b=00\dots0}^{b=11\dots1} e^{-i\sum_l b_l \Theta_l} P_n(b_n) \dots P_1(b_1). \tag{4.2}$$

Jeder Rechenverlauf besitzt eine Phase $\Theta = \sum_l b_l \Theta_l$, womit sich die Wirkung definieren lässt als $I = \hbar \sum_l b_l \Theta_l$.
Jeder dieser Rechenverläufe entspricht einer diskreten, klassischen Raumzeit, die gesamte Rechnung ist dann eine Superposition dieser Raumzeiten. Um eine Quantenrechung mit der allgemeinen Relativitätstheorie in Verbindung zu setzen, wird die Rechengeschichte durch einen Graphen dargestellt. Dieser wird in den $\mathbb{R}^4$ eingebettet. Die Information, welche durch den Graphen läuft, misst den Abstand in der Raumzeit analog zu den Signalen, die zwischen GPS Satelliten ausgetauscht werden. Aus der kausalen Struktur der Rechnung und der lokalen Wirkung müssen andere Größen abgeleitet werden. Da die Art der Informationsverarbeitung unabhängig von der Einbettung in die Raumzeit ist, sind die aus ihr gewonnenen dynamischen Gesetze automatisch kovariant. Dies impliziert die Einstein-Gleichungen in ihrer diskreten Form, wozu das Regge-Kalkül benötigt wird. In diesem Regge-Kalkül ist die Geometrie der Raumzeit durch ein simpliziales Gitter definiert, dessen Kantenlängen die Metrik und die Krümmung festlegen. Jeder Vertex enthält zwei eingehende und zwei ausgehende Kanten. Diese können als Nulllinien E_a aufgefasst werden, da entlang von Kanten keine Phase generiert wird. Diese bilden die Basis eines Vertex, weshalb der diagonale Teil der Metrik verschwindet. Sobald der nichtdiagonale Teil der Metrik an jedem Vertex gewählt ist, ist die Länge einer Kante, die die Vertices l und j verbindet gegeben als Mittelung der Längen, die durch die zu diesen Vertices gehörenden Metriken definiert sind:

$$L_l = g_{ab}(j) l^a l^b/2 + g_{ab}(k) l^a l^b/2. \tag{4.3}$$

Im vierdimensionalen Regge-Kalkül ist die Krümmung durch dreieckige Scharniere gegeben. Diese besitzen nach der Wahl der Metrik klar definierte Flächen A_h und eine gravitionelle Wirkung. Diese gravitionelle Wirkung eines Scharniers ist gegeben durch:

$$I_h = \frac{1}{8\pi G} A_h \epsilon. \tag{4.4}$$

Hierin bezeichnet ϵ den Defizit-Winkel. Dies ist der Winkel, der beim Aufeinandertreffen von Flächen zum in der Ebene erwarteten Wert fehlt.
Die Einstein-Regge-Gleichungen können durch die Forderung, dass die kombinierte Wirkung aus Gravitation und Materie stationär unter Variation der Metrik ist:

$$\frac{\delta I_G}{\delta g_{ab}(l)} + \frac{\delta I_M}{\delta g_{ab}(l)} = 0. \tag{4.5}$$

Die Variation der gravitionellen Wirkung führt auf einen Term proportional zum diskretisierten Einstein-Tensor G^{ab}, die der Materiewirkung auf einen proportional zum Energie-Impuls-Tensor T^{ab}:

$$\frac{\delta I_G}{\delta g_{ab}(l)} = \frac{-1}{16\pi G} \Delta V_l G^{ab} \tag{4.6}$$

$$\frac{\delta I_M}{\delta g_{ab}(l)} = \frac{1}{2} T^{ab} \Delta V_l. \tag{4.7}$$

Mittels eines Ansatzes über den Lagrangemechanismus lassen sich diese in einer expliziten Version schreiben:

$$-\sum_{h\in N(l)} \epsilon_h \frac{\delta A_h}{\delta g_{ab}(l)} = 4\pi G T^{ab} \Delta V_l. \tag{4.8}$$

Die Summe enthält nur die Scharniere die an den Vertex l angrenzen.
Abschließend sollen einige Konsequenzen dieses Modells dargestellt werden. So legt Loyd in seinem Papier da, dass die Rückreaktion der Metrik auf quantenmechanische Materie oder das Informationsparadoxon schwarzer Löcher mit seinem Modell erklärt werden können. Ein interessanter Aspekt sind kosmologische Vorhersagen des Modells. So können die Einstein-Regge-Gleichungen für ein homogenes, isotropes Universum in der Form der Friedmann-Robertson-Walker Form geschrieben werden:

$$-16\pi GK/3 = \dot{H} \tag{4.9}$$

$$8\pi G(K+U)/3 = H^2 - k/a^2. \tag{4.10}$$

Diese können in Abhängigkeit vom Krümmungsparameter k untersucht werden. Für ein flaches Universum, $k = 0$, können unterschiedliche Bereiche untersucht werden.

- Ist die kinetische Energie $K = 0$, ist $\dot{H} = 0$ und der Hubble-Parameter H ist konstant. Das Universum durchläuft eine Inflation: $a(t) = a(0)e^{\alpha t}$.
- Die Situation $K \gg U$ entspricht einem strahlungsdominiertem Universum mit $a(t) \propto t^{1/2}$.
- $K \approx 3U$ stellt ein materiedominiertes Universum dar. Die Lösung für die Expansion ist $a(t) \propto t^{2/3}$.

5 Literatur

- [1]*David P. DiVincenzo*, 1996, arxiv.org/abs/cond-mat/9612126v2
- [2]*Seth Loyd*, 2013, arxiv.org/abs/1312.4455
- [3]*Seth Loyd*, 2001, arxiv.org/abs/quant-ph/0110141
- [4]*Seth Loyd*, 2005, arxiv.org/abs/quant-ph/0501135
- [5]*Joachim Stolze, Dieter Suter*, Quantum Computing - A Short Course from Theory to Experiment, 2008, Wiley-VCH